Licenciatura em Engenharia Biomédica

MODELOS COMPUTACIONAIS DOS PROCESSOS FISIOLÓGICOS

DINÂMICA DOS SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

(Documento de trabalho)

António Dourado Pereira Correia

Advertência: as presentes notas de trabalho visam apoiar ao estudo da disciplina de Modelos Computacionais dos Processos Fisiológicos. Não dispensam a consulta de informação bibliográfica complementar, nomeadamente a indicada nestas notas. O autor agradece as correções, comentários e sugestões que o leitor entenda por bem fazer.

Departamento de Engenharia Informática

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade de Coimbra

Setembro 2022

ÍNDICE GERAL

Capítulo 1

(Documento de trabalho)

Introdução à Teoria Geral dos Sistemas

1.1. Sistemas, elementos e relações

Sistema é um conceito que povoa densamente o nosso quotidiano e o nosso imaginário. Falamos do "sistema" a propósito de praticamente todos os aspetos da nossa vida e da natureza. Desculpabilizamo-nos dizendo que "a culpa é do sistema".

Mas afinal o que é um sistema ?

Poderemos tentativamente defini-lo como um conjunto de elementos, ou componentes, relacionados e interagindo entre si de modo a desempenharem alguma função.

Genericamente diz-se que existe uma **relação** entre os elementos E1 e E2 (de um sistema) se o comportamento de E1 é influenciado ou controlado pelo de E2 e se o comportamento de E2 é influenciado ou controlado pelo de E1.

Um **atributo** de um elemento é uma propriedade característica do elemento (cor, tamanho, peso, etc.). Um atributo de uma relação é uma qualidade característica da relação (intensidade, velocidade de comunicação, etc.). No estudo de sistemas dinâmicos a evolução dos atributos assume um espeto fundamental, dado que é essa evolução expressa por mudanças várias que exprime a dinâmica. Dinâmica e mudança são conceitos estreitamente ligados.

Se entendermos por **elemento** algum objeto ou algum fenómeno da vida natural ou social, ou a sua representação, que tem certos atributos que podem variar ao longo do tempo em consequência do comportamento do próprio elemento, teremos uma definição suficientemente geral para abranger o objetivo do nosso estudo: os sistemas biológicos e fisiológicos. Um sistema diz-se **dinâmico** se os atributos dos seus elementos variam ao longo do tempo.

Há dois conceitos-chave nesta definição de sistema: **relação** e **interação**. Sem eles não existe o sistema.

A Figura 1 ilustra a importância desses conceitos. Na parte a) temos três elementos: um vaso com água, uma lamparina e uma caixa de fósforos, lado a lado sobre a mesa. Não há qualquer relação entre eles. Não constituem um sistema. Na parte b), acende-se a lamparina com um fósforo, coloca-se a lamparina sob o vaso com água (usando um suporte), e agora os elementos estão relacionados e interagem: a chama da lamparina transmite energia térmica à

água através das paredes do vaso. Temos um sistema com um objetivo: o aquecimento da água do vaso.

a) b)

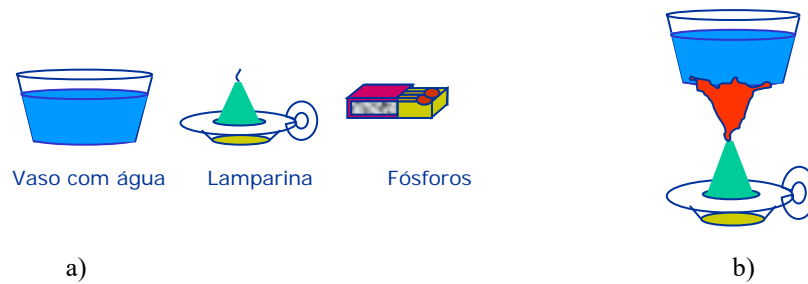



Figura 1. a) O vaso, a lamparina e os fósforos não constituem um sistema. b) montando-os de forma conveniente, estabelecendo entre eles relações apropriadas, compõem um sistema de aquecimento de água.

Ao estabelecermos relações entre os elementos do sistema, surgiram propriedades novas, que não existiam em qualquer elemento isolado, mas que nascem com as inter-relações entre os elementos. Chama-se efeito de **sinergia**: o todo é maior do que a soma das partes.

Suponhamos agora um computador em bom estado de funcionamento. Todas as suas partes interagem entre si. Entre a CPU e o disco duro circula informação. Entre a fonte de alimentação e o processador, ou a memória, circula energia. Se desmontarmos as partes e as amontoarmos na nossa secretária, quebrando a interação entre os componentes, deixa de haver circulação de informação e de energia e deixa por isso de haver sistema. O sistema não é igual à soma dos seus componentes. Ele é mais do que isso.

Um automóvel em funcionamento contém um número muito elevado de componentes de diversa natureza: depósito de combustível, motor, pneus, eletrónica e microprocessadores, etc. Entre eles circula informação de múltiplos sensores e atuadores para os microprocessadores e vice-versa, circula massa (do depósito de combustível para os injetores no motor) e energia (do motor para as rodas, por exemplo, energia mecânica).

Massa, **energia** e **informação** são os três elementos circulantes dos sistemas modernos.

Uma célula animal ou vegetal é uma fábrica sofisticada e complexa. Cada um dos seus componentes tem uma missão específica, e a interação entre eles, conjugando as suas missões, permite a vida. Também aí fenómenos de trocas de massa (nutrientes, por exemplo),

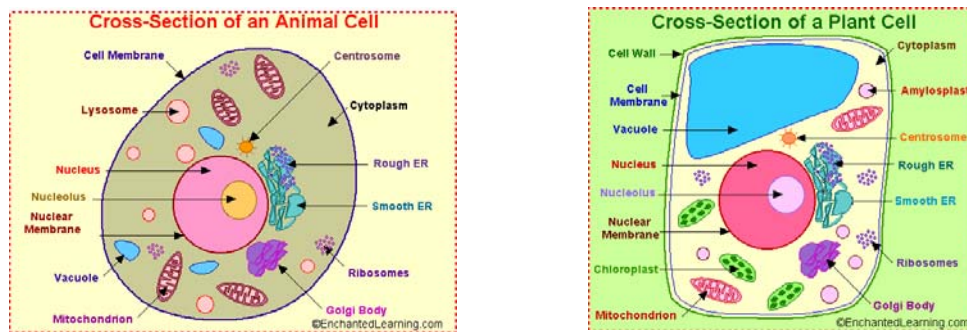
de energia (por exemplo calor), de informação (através dos genes e das proteínas) são a condição primitiva para a existência do sistema celular no seu todo.

a) Célula animal b) Célula vegetal

Figura 2. Uma célula é um sistema já muito elaborado e complexo (de (http://www.enchantedlearning.com/subjects/biology/cells/, 12 julho 2022).

1.2. Retroação (*Feedback*) e (auto)regulação

A Figura 3 representa uma instalação de ar condicionado numa sala com regulação computorizada A temperatura da sala é medida por um termómetro (por exemplo um termopar) e enviada ao computador. Este compara com a temperatura desejada para a sala (chamada temperatura de referência) e conforme o erro observado manda aquecer ou arrefecer até que o erro se anule. O dispositivo que dá ou retira calor da sala chama-se atuador.

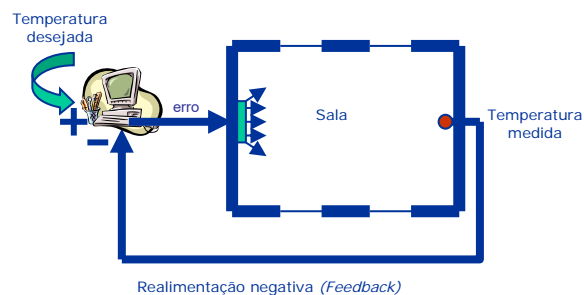



Figura 3. Servomecanismo de regulação: ar condicionado automático.

Trata-se de um sistema de regulação construído pelo homem com um objetivo preciso. Tradicionalmente chama-se um servomecanismo (de regulação), na medida em que há um mecanismo servo (escravo), neste caso o atuador. O sistema tem alguma capacidade de autorregulação, depois de lhe ser indicada a temperatura de referência. O elemento essencial que permite tal capacidade é a informação da temperatura da sala, através do caminho de

retroação (da saída para a entrada) ou de **realimentação**, em inglês ***feedback.*** *Feedback* permite a **autorregulação**. Suponhamos que num dia muito frio abrimos uma janela da sala e entra uma grande quantidade de ar frio. Esse facto constitui uma perturbação do ambiente do sistema. Com realimentação, o sistema é capaz de reagir a essa perturbação de modo a repor as condições de equilíbrio. Mas sem a realimentação tal não acontece.

Na nossa vida quotidiana contactamos com centenas de servomecanismos variados (muitas vezes sem nos apercebermos). Pode-se mesmo afirmar que a nossa civilização tecnológica assenta em servomecanismos de (auto)regulação. Os sistemas biológicos têm múltiplos e intrincados caminhos de *feedback* que viabilizam a vida.

Consideremos por exemplo um sistema biológico de duas populações, o par predador-presa, sendo a presa herbívoro e o predador carnívoro. Se a vegetação aumenta, a população de herbívoros cresce exponencialmente. Por isso a população de carnívoros aumenta também exponencialmente, o que provoca a diminuição dos herbívoros. Assim, o aumento inicial dos herbívoros retroagiu consigo própria através da sua relação com a população de carnívoros.

A regulação do açúcar no sangue pode ser representada pela Figura 4 onde se evidenciam múltiplas malhas de realimentação que permitem a capacidade de autorregulação de um corpo saudável.

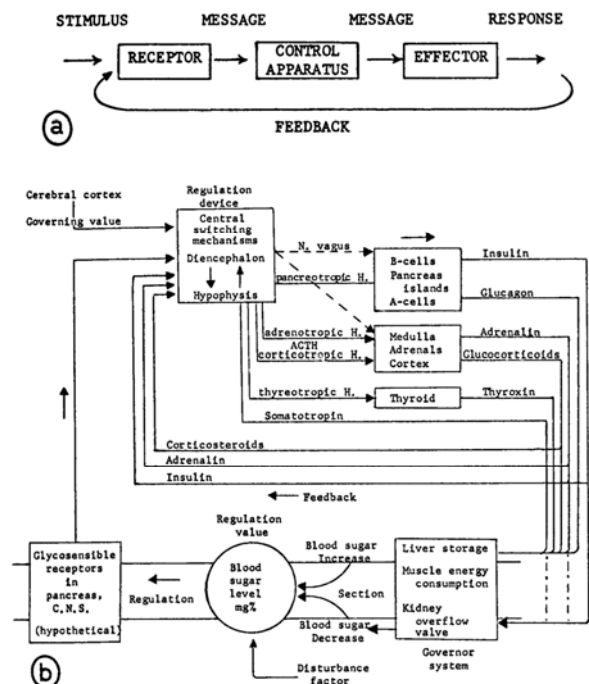



Figura 4. Sistema com várias malhas de retroação: a regulação do açúcar no sangue (de Bertalanffy, 1969).

Nos exemplos anteriores a realimentação é usada com sinal negativo, e por isso diz-se realimentação **negativa** (*negative feedback*). Mas pode existir com sinal positivo, e nesse caso diz-se realimentação **positiva**.

A realimentação positiva pode ter efeitos favoráveis, mas também pode ter efeitos catastróficos sobre um sistema. Quando uma pessoa corre, necessita de mais oxigénio e por isso aumenta o ritmo da respiração (*feedback* positivo, mais corre mais respira). As malhas de realimentação positiva dominam durante esta fase, provocando um aumento da oxigenação do sangue, através dos pulmões, que por sua vez permite a corrida. Numa pessoa saudável, os limites da capacidade humana são determinados por *feedback* negativo, e por isso só se pode correr até um certo limite, o que nos impede de exaurir. Se as malhas de realimentação negativa se quebram, permitindo o domínio indesejável das positivas, como acontece quando os atletas tomas certas drogas dopantes, podem-se alcançar desempenhos sobre-humanos, mas por vezes com resultados trágicos, quando os processos biológicos dos atletas não conseguem aguentar requisitos descontroladas que levam ao colapso e à morte, como se tem já verificado em plenas provas.

Um exemplo muito mais banal de realimentação positiva acontece quando, num palco, o microfone do interveniente está defronte de uma coluna de som: o som vai do microfone ao amplificador, deste ao altifalante, deste ao microfone, ao amplificador, etc., até que o amplificador satura e se ouve um som agudo muito desagradável. Por isso é necessário que o microfone esteja sempre fora do campo de abrangência do altifalante, ou seja, atrás do seu plano frontal.

Uma relação entre elementos do sistema materializa-se, com vimos, através de fluxos de materiais, de informação ou de energia entre os elementos. Por isso o conceito de comunicação pode ser usado equivalentemente ao de relação.

A definição que adotámos de sistema, é muito geral, permitindo englobar fenómenos da vida natural desde a célula até ao próprio universo. Por isso, em cada caso concreto, temos que nos contextualizar distinguindo o que é para nós o sistema em estudo do que o rodeia (ou do seu ambiente).

1.3 Ambiente, sistemas fechados, sistemas abertos e homeostasia

Um sistema está sempre envolvido pelo seu **ambiente** e com ele comunica através da sua **fronteira** que o demarca do resto do mundo.

Figura 5 a). Um conjunto de elementos não compõem um sistema. b) algumas relações entre alguns elementos não são suficientes para se considerar um sistema. c) se houver uma densidade de relações envolvendo a maior parte dos elementos (ainda que um ou outro se possam manter isolados) teremos um sistema com entradas, saídas e uma fronteira com o meio ambiente (de Flood e Carson (1993)).

A intensidade da comunicação entre o sistema e o seu ambiente é variável. Se é fraca, diz-se que o sistema é **fechado.** Uma reação química num reator fechado em que se misturam os reagentes, é descrita, do ponto de vista do exterior, por um sistema fechado. É a este tipo de sistemas que se aplicam as leis da termodinâmica.

Mas se a comunicação entre um sistema e o seu ambiente é intensa, estamos em presença de um sistema aberto, que troca materiais, informação e energia com o seu ambiente, através de uma fronteira. Uma célula viva é um caso típico de sistema aberto.

Num sistema aberto, dado que as trocas são permanentes e contínuas, nem sempre é possível identificar a fronteira com precisão.

Os seres vivos são sistemas abertos: estão sempre a receber do ambiente e a enviar para o ambiente materiais e energia (e também informação), a sua estrutura interna está em permanente mudança, e por isso nunca se encontram em estado estacionário (no sentido de que todos os atributos de todos os seus elementos têm um valor constante ao longo do tempo), mas em equilíbrio químico e termodinâmico (em que os atributos apresentam padrões definidos ao longo do tempo, com possíveis variações dentro de certos limites). A este equilíbrio chama-se **homeostasia** ou **homeostase** .O conceito foi criado pelo fisiologista francês Claude Bernard (1813-1878), https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Bernard, com a sua

famosa frase "*La fixité du milieu intérieur est la condition de la vie libre*" que é ainda hoje o princípio subjacente à homeostasia.- a constância do meio interior é a condição da vida. O termo foi depois fixado pelo fisiologista americano Walter Cannon (1871-1945), no seu livro *The Wisdom of the Body* (1932), onde descreve as características gerais da homeostasia através de quatro proposições, http://en.wikipedia.org/wiki/Walter Cannon:

1- A constância num sistema aberto, como o representado pelo nosso corpo, requer um mecanismo que atue para manter essa constância (como por exemplo na concentração da glucose, na temperatura corporal, no balanço ácido-base, etc.). Constância deve interpretar-se aqui como estando dentro de um intervalo de tolerância saudável, e não como um valor absolutamente constante ao longo do tempo; por exemplo a glucose estar a 120mg/l ou 123mg/l não faz diferença do ponto de vista do estado de saúde da pessoa.

2- As condições de regime estacionário, no sentido de que as variáveis estão dentro do intervalo de tolerância, requerem que qualquer tendência para a mudança (saída do intervalo de tolerância) se confronte com fatores que resistam à mudança. Por exemplo um aumento da concentração de açúcar no sangue produz a sensação de sede – o corpo procura diluir a concentração de açúcar no fluido extracelular.

3- O sistema de regulação que determina o estado homeostático é composto por vários mecanismos cooperantes atuando simultânea ou sucessivamente. Por exemplo o açúcar no sangue é regulado pela insulina (produzido pelas células beta do pâncreas), glucagon ou glicagina (produzida pelas células alfa do pâncreas, funciona como uma hormona oposta à insulina), e outras hormonas que controlam a libertação de insulina pelo pâncreas e a sua absorção pelos tecidos. Para regulação da temperatura no corpo humano, o arrefecimento do sangue (pelo contacto com o ambiente) estimula o cérebro que ativa mecanismos de produção de calor que consomem calorias da alimentação, o que faz com que a temperatura do corpo recupere e suba.

4- A homeostasia não acontece por acaso, mas é o resultado do autogoverno organizado.

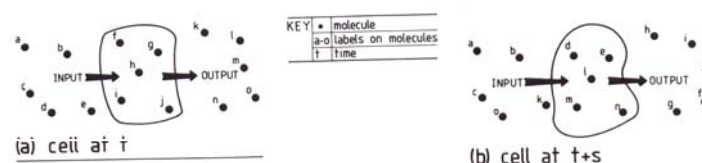



Figura 6. Ilustração da homeostasia. Os componentes interiores da célula foram todos substituídos entre os instantes t e t+s, mas a célula manteve-se num estado estacionário porque a sua estrutura interna manteve-se como anteriormente, embora com novos elementos (de Flood e Carson (1993)).

1.4 Entropia e neguentropia

A **entropia** exprime a tendência que as coisas têm para evoluírem para um estado de grande desordem e desorganização. Ela carrega consigo a lei irreversível da degradação da energia e da matéria, tal como enunciado pelo segundo princípio da termodinâmica: os sistemas tendem para a desordem. Essa foi a conclusão de Clausius (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clausius/ 12 julho 2022) ao enunciar o seu famoso princípio da máxima entropia (" a entropia do universo tende para um máximo" (cresce sempre)), ou, matematicamente teremos (1) em que S representa a entropia e dS a sua variação.

$$dS \geq 0 \tag{1}$$

Mas os sistemas homeostáticos mantêm a ordem, tendem para a ordem. Não haverá aqui uma contradição na ciência ?

Foi este o problema tratado por Ilya Prigogine, propondo em 1945 o teorema da mínima produção de entropia aplicável a estados estacionários de não equilíbrio, dando uma explicação da analogia que relaciona a estabilidade de estados de equilíbrio termodinâmico (noção clássica) com a estabilidade de sistemas biológicos, tais como o expresso pelo conceito de homeostasia. Prigogine foi Prémio Nobel da Química em 1977 (https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1977/summary/ 12 julho 2022). Este resultado é dado pela equação de Prigogine (2) e (3),

$$dS = d_e S + d_i S \tag{2}$$

$$dS \leq 0 \tag{3}$$

em que d_iS representa a entropia produzida internamente pelo processo irreversível de degradação (reações químicas, difusão, transporte de calor, etc.) e d_eS representa a entropia importada pelo sistema vivo, aberto, sob a forma de matéria e energia. Pela lei de Clausius,

$$d_i S \geq 0 \tag{4}$$

substituindo (4) em (2) facilmente se conclui (5)

$$d_e S \leq 0 \; . \tag{5}$$

Devido a (5) chama-se **neguentropia**, **entropia negativa** a d_eS. Os sistemas abertos importam neguentropia.

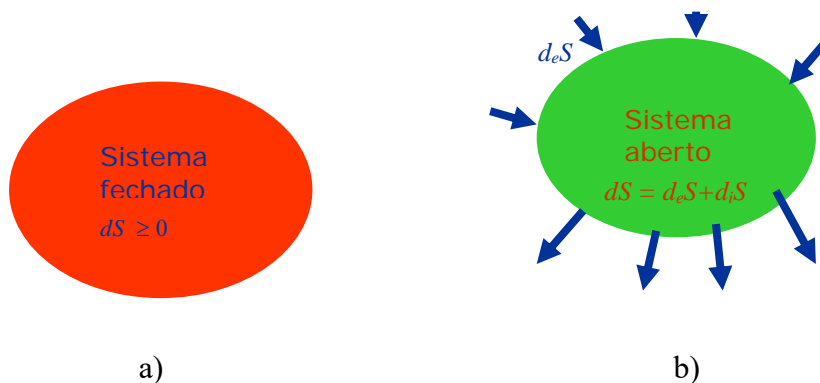



Figura 7. a) Sistema fechado (equação de Clausius) e b) sistema aberto (equação de Prigogine)

Por isso as leis da termodinâmica aplicam-se apenas aos sistemas fechados. A entropia aparece assim como uma força em luta contra a homeostasia. Com a homeostasia, os sistemas importam materiais, energia e informação do ambiente, e com eles compensam a tendência para a desordem, criando e mantendo a ordem, resistindo ao segundo princípio da termodinâmica, e podendo até evoluir para estados de maior ordem e maior organização.

A **estrutura** de um sistema exprime a forma com os seus elementos se relacionam uns com os outros e estabelece a base de suporte aos processos que nele decorrem.

Se observarmos um sistema em instantes sucessivos, aperceber-nos-emos que ele evolui de alguma forma. O comportamento do sistema é essa nossa perceção. O comportamento do sistema diz-se orientado por um objetivo se puder ser apreciado e avaliado relativamente a uma finalidade particular.

Nos sistemas abertos um dado estado final de equilíbrio pode ser alcançado a partir de diferentes estados iniciais, seguindo diferentes trajetórias. Diz-se, neste sentido, que o estado de equilíbrio tem um valor equifinal e que o sistema goza da propriedade de **equifinalidade** (*equifinality*)

1.5 Estado e espaço de estados

Posteriormente, no Capítulo 4, iremos estudar a noção de **estado** e de **espaço de estados** e as suas propriedades. Podemos, no entanto, desde já ver uma noção inicial de **variáveis de estado**. Alguns atributos elementares de um sistema são muito importantes e de *per si*

permitem-nos ter uma imagem suficientemente precisa do sistema num dado momento, isto é, do seu estado. Por exemplo a temperatura de uma estufa, a velocidade de um veículo, a população de uma espécie, o nível de um reservatório de água, etc. Esses atributos chamam-se por isso variáveis de estado. Para a representação matemática define-se um vetor x, chamado **vetor de estado**, cujos componentes x_i são as variáveis de estado.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

Como veremos, o estado é uma síntese da história do sistema: o estado atual do sistema resulta de toda a sua evolução passada. Num sistema dinâmico o estado variará ao longo do tempo. Se o representarmos graficamente ele descreve uma **trajetória** no espaço n-dimensional, chamado espaço de estados. Se pudermos prever com rigor os valores futuros do estado, conhecido exatamente o seu estado inicial, estamos em presença de um sistema **determinístico**; caso contrário temos um sistema **não-determinístico**, ou **probabilístico**, ou **estocástico**.

1.6 Autopoiese, adaptação, cibernética

Um sistema que goza da propriedade de **autopoiese** tem a capacidade de se reproduzir: uma célula produz os seus próprios componentes que por sua vez a produzem. Autopoiese significa por isso a capacidade de **auto-produção**, o que acontece com os seres vivos: eles são autopoiéticos porque estão organizados para permitirem que os seus próprios processos produzam os componentes que são necessários para a continuação desses mesmos processos.

Um sistema diz-se **adaptativo** se tiver capacidade de adaptação. A adaptação surge como a necessidade de resposta a mudanças no ambiente com vista à sobrevivência e à manutenção de um bom desempenho do sistema. Pode-se dizer que a teoria darwiniana da evolução constitui uma teoria de adaptação. A capacidade de adaptação é decisiva quando o ambiente muda com intensidade e com frequência. A adaptação requer a capacidade de regulação e controlo para resposta às mudanças bruscas e de longo prazo (regulação de curto prazo e regulação de longo prazo). Qualquer ser vivo requer múltiplos sistemas de regulação e de

controlo de curto e médio prazo para sobreviver; a isto se chama por vezes a **lei da variedade requerida** (*requisite variety*).

Por vezes na nossa vida olhamos para as coisas apenas parcialmente, vendo apenas algumas partes e esquecendo-nos de olharmos para elas globalmente, holisticamente. Por isso o resultado das nossas ações é muitas vezes contra as nossas expectativas, por termos negligenciado ou esquecido a complexidade dos fenómenos. Este facto traz-nos a necessidade do **pensamento sistémico**, chama a atenção para a necessidade de metodologias e de modelos para lidar com a complexidade. Sem este pensamento formal veremos apenas partes, as explicações simplistas, as soluções simplistas.

A **cibernética** estuda a adaptação, a regulação e o controlo. Podemos definir cibernética como a ciência do controlo e da comunicação nos animais e nas máquinas (proposta por Wiener em 1948 no livro fundador *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and Machine*; descreve as leis naturais que governam a comunicação e o controlo em sistemas dinâmicos.

1.7. Uma hierarquia de sistemas

Numa hierarquia de regulação e de controlo poderemos definir sistemas em diversos níveis: teremos assim uma **hierarquia** de sistemas. Uma **meta sistema**, ou **hipersistema**, é um sistema que se posiciona acima de um sistema numa dada hierarquia. Um **subsistema** posiciona-se abaixo. No ser humano o cérebro/consciência é o meta sistema de nível mais elevado e o átomo o de nível mais baixo. Teremos a hierarquia: átomo, molécula, célula, tecido, órgão, sistema funcional, …, consciência.

A organização **hierárquica** é assim uma representação lógica dos fenómenos como sistemas e subsistemas. Descendo a hierarquia, aumentamos o nível de **resolução** da análise dos fenómenos, vendo cada vez mais detalhes. A escolha de um nível apropriado de resolução para análise de um fenómeno é uma tarefa decisiva que determina no fundo quais as questões com que lidaremos no estudo. O nível de resolução escolhido chama-se o sistema em **enfoque** (*system-in-focus*).

Para se ser um bom cientista de sistemas tem que se ser simultaneamente **holístico** (olhar para o sistema como um todo) e **reducionista** (ser capaz de compreender o sistema de modo mais detalhado, em cada uma das suas partes).

Quando se sobe numa hierarquia de sistemas descobre-se uma propriedade fundamental de todo a teoria dos sistemas: **o todo é maior do que a soma das partes**. Trata-se da propriedade de **emergência**: há propriedades do hipersistema que emergem apenas (por vezes inesperadamente) quando se combinam os subsistemas.

As células agrupam-se em diversos órgãos (rim, fígado, coração, pulmão, etc.) cada qual com uma função específica e com propriedades diferentes das suas células. Os órgãos, em conjunto, formam um corpo com propriedades emergentes: eles organizam-se através da comunicação e do controlo (cibernética) numa hierarquia de partes corporais que permitem o surgimento das capacidades de observação, audição, olfato, locomoção, emoção, isto é, da pessoa humana. Um ser humano não é um agregado das partes corporais. Nem uma sociedade um agregado de grupos humanos. Os sistemas juntam-se para formar hipersistemas cujas propriedades são diferentes das dos sistemas.

A emergência é assim uma caracterização dos fenómenos que não conseguimos explicar de outro modo.

A emergência de uma sociedade é a sua cultura.
A **sinergia** é um termo usado para descrever a emergência de propriedades inesperadas e interessantes, por exemplo em teoria das organizações (a sinergia dos grupos de trabalho, por exemplo).
De acordo com Bertalanffy, poderemos definir a hierarquia de sistemas da Tabela 1.
Ao longo do último século surgiram diversas **metáforas** para os sistemas, à medida que se procurava aplicar a teoria dos sistemas ao funcionamento dos grupos humanos e das sociedades.

Primeiramente a **metáfora da máquina**, olhando para um sistema fechado com um conjunto de objetivos bem precisos e uma estrutura rígida de controlo para os alcançar (os servomecanismos tecnológicos são disso um exemplo). Foi esta metáfora que inspirou o desenvolvimento das cadeias de montagem na indústria e a sua gestão.

Depois de Prigogine essa visão foi ultrapassada, passando-se à **metáfora orgânica** que descreve redes complexas de elementos e de relações com uma transformação afetada por realimentação.
Mas a metáfora orgânica não permite descrever as emoções. Surgiu por isso a **metáfora do cérebro**.

Nível	Descrição e exemplos
Sistemas simbólicos	Linguagem, lógica, matemática, ciência, morais, etc.
Sistemas socioculturais	Populações de organismos (incluindo humanos); comunidades humanas determinadas por símbolos (culturas).
O Homem	Simbolismo; passado e futuro, o "eu" e o mundo; autoconsciência resultando como consequência a comunicação pela linguagem.
Animais	Aumento da importância do tráfego da informação (evolução dos recetores, sistemas nervosos, etc.); aprendizagem; início da consciência.
Organismos inferiores	Organismos do tipo planta: aumento da diferenciação nos sistemas ("divisão do trabalho" nos organismos); distinção da reprodução das funcionalidades individuais.
Sistemas abertos	Chama, células, tecidos, órgãos e organismos em geral.
Mecanismos de controlo	Termostato, servomecanismos, mecanismos homeostáticos em organismos vivos.

Tabela 1. A hierarquia de sistemas segundo Bertalanffy (1969).

A **metáfora da cultura** permite incluir uma rede de valores, crenças e normas.
Finalmente a **metáfora política** permite redes de interesses interatuantes, interesses que os indivíduos procuram alcançar.

No nosso estudo da dinâmica de processos biológicos e fisiológicos preocupar-nos-emos com a obtenção de modelos matemáticos computáveis (isto é, programáveis em computador e úteis para a análise, simulação e predição) de sistemas dos dois últimos níveis da hierarquia de Bertalanffy (mecanismos de controlo e sistemas abertos).

Basearemos a nossa análise nas propriedades dos fenómenos físicos, químicos, termodinâmicos, etc. A aplicação das respetivas leis leva-nos a um conjunto de equações diferenciais que permitem descrever e simular computacionalmente o respetivo

comportamento dinâmico. As equações diferenciais servem também para a obtenção de formas de representação matemática muito práticas e de grande utilidade: a função de transferência (no caso linear) e as equações de estado (casos linear e não linear).

Algumas propriedades dinâmicas, como a estabilidade e tipo de resposta transitória, são facilmente obtidas nessas representações especiais.

Alguns sistemas não lineares têm uma importância especial no contexto biológico e fisiológico: os sistemas caóticos. Com veremos, um sistema é caótico se tiver um comportamento que não se possa prever com o conhecimento possível do seu estado atual. Veremos alguns exemplos concretos e uma introdução à sua teoria.

Bibliografia

Flood, R. and E.R. Carson, Dealing with Complexity, An Introduction to the Theory and Applications of Systems Science, Plenum Press, 1993

Bertalanffy, L., General Systems Theory, George Brazillier, NY, 1969

Boyd, D.W. Systems Analysis and Modelling, A Macro-to-Micro Approach with Multidisciplinary Applications, Academic Press, 2001.

Wiener,N., Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and Machine, the MIT Press, 2019 (reedição da de 1948).

Capítulo 2.

Modelização matemática por equações diferenciais

2.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 1, energia, massa e informação são os três elementos circulantes dos sistemas. Há, como sabemos, muitas formas de energia, e, portanto, sistemas de natureza muito diversa. Se quisermos definir uma taxonomia de sistemas, que nos apoie no estabelecimento de uma teoria unificadora, poderemos usar o critério da energia e classificá-los conforme o tipo de energia que neles circula. Teremos assim sistemas elétricos, mecânicos, térmicos, fluídicos, químicos, etc.

Há sistemas com mais do que um tipo de energia: um robô tem energia mecânica (movimento) e energia elétrica (motores) sendo por isso um sistema eletromecânico; um acumulador doméstico de água quente é um sistema termoelétrico, numa instalação química existem energia química (reação), fluídica (circulação de líquidos e gases), térmica.

Os sistemas biológicos e fisiológicos são ainda mais complexos. Eles contêm subsistemas de diversos tipos de energia, mas têm propriedades emergentes em relação a eles - as que criam a própria vida.

Para analisar sistemas parcelares do corpo humano, por exemplo o cardiovascular ou o respiratório, mantendo-nos em níveis de complexidade tratáveis, teremos que lhes aplicar métodos de análise fundamentados nos princípios gerais dos sistemas do mesmo tipo de energia. O sistema cardiovascular é essencialmente um sistema fluídico: uma bomba, um conjunto de canais de circulação, uma certa resistência à circulação. O movimento muscular pode ser modelizado por um sistema mecânico.

Veremos depois que é possível definir um conjunto de características básicas dos sistemas que atravessam todos os tipos, permitindo estabelecer um conjunto de analogias entre eles. Existe uma analogia entre dois sistemas se as suas equações matemáticas têm a mesma forma. Estas analogias permitem-nos usar um dado tipo de sistema (elétrico, por exemplo), para estudar outros.

Na literatura biomédica é muito frequente encontrar-se esta abordagem. A figura seguinte,

por exemplo, representa a carga do coração humano por um circuito elétrico equivalente (capa do livro de Hoppensteadt).

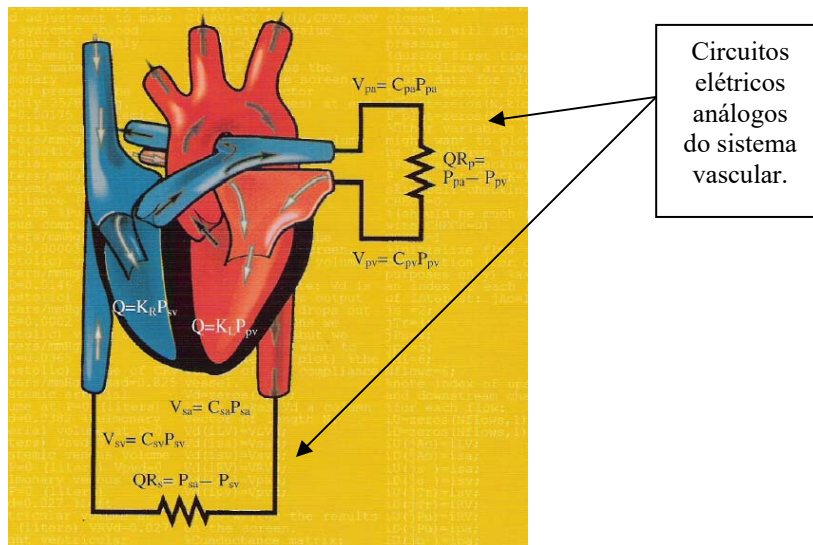



Figura 2.1.1 A carga do sistema vascular sobre o coração, pode ser representada por uma simples resistência elétrica. Se o efeito de bombagem do coração for representado por uma fonte de alimentação elétrica, a corrente que circula na resistência representará o fluxo sanguíneo (da capa de Hopensteadt).

Em (Witten (Ed), *An electrical equivalent circuit model of glucose-insulin kinetics during intravenous glucose tolerance tests in dogs and in man*, p. 1188)) encontra-se um circuito elétrico que é análogo ao sistema que descreve a cinética do par glucose-insulina.

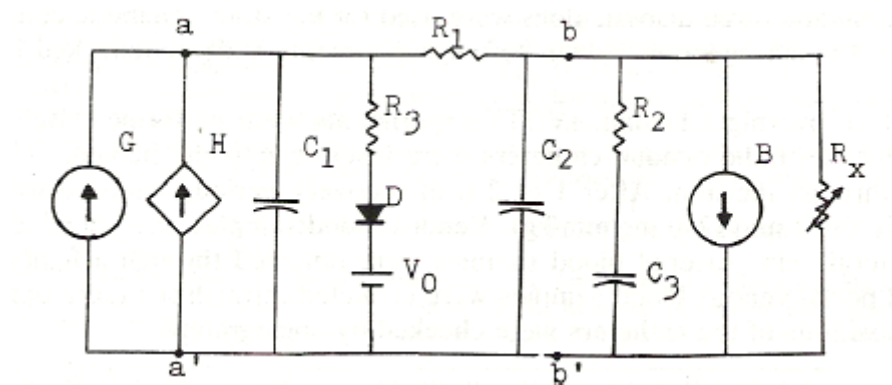



Figura 2.1.2. Circuito elétrico não-linear (devido aos díodos) análogo da cinética do par glucose-insulina (de Witten,1987)

Os estudos dos músculos e do movimento humano recorrem intensamente a modelos mecânicos, como ilustra a figura seguinte (de McMahon, 1984).

Modelo mecânico de um músculo ativo

Modelo de uma perna

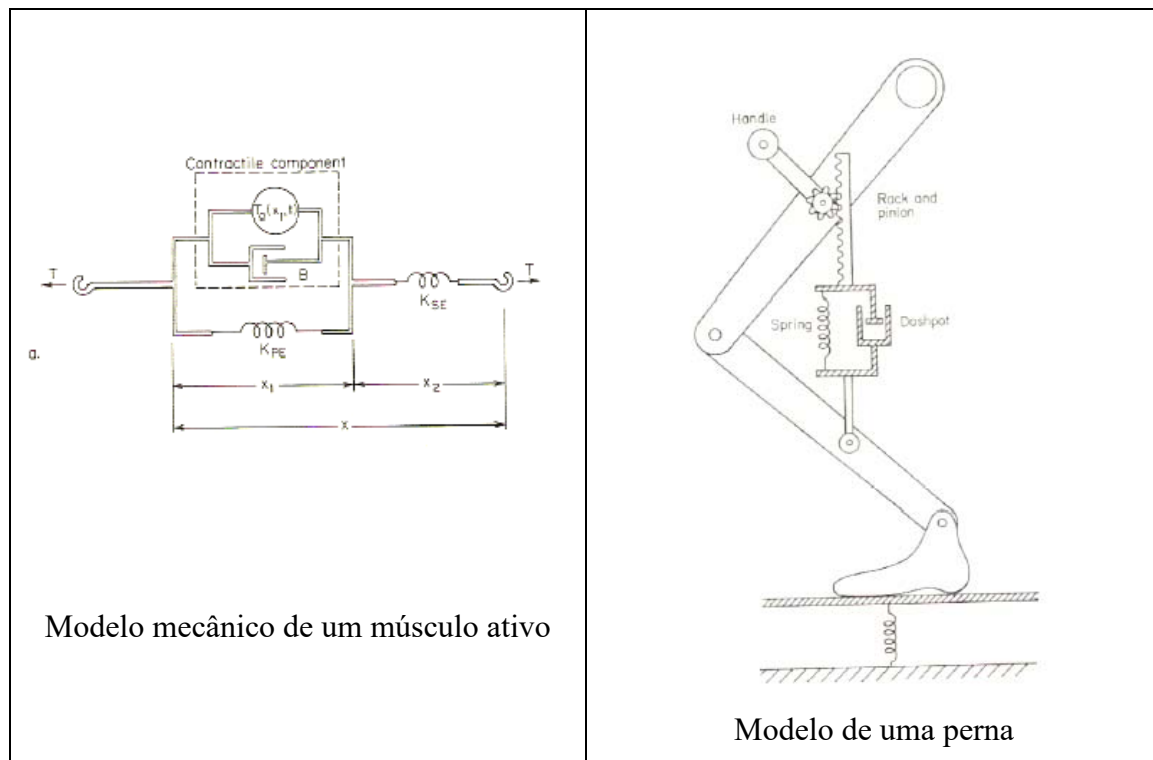



Figura 2.2.3. Modelos mecânicos de músculos. Neste capítulo estudaremos o significado dos diversos componentes mecânicos (de McMahon, 1984)

Os elementos dos sistemas térmicos, fluídicos e químicos são ferramentas indispensáveis em estudos de modelos compartimentais (muito usados em farmacologia e medicina). Por exemplo a figura seguinte mostra um sistema fluídico que permite modelizar a ingestão oral de um fármaco, a sua absorção pela corrente sanguínea no intestino e a sua excreção no rim (de Bruce, pp. 107).

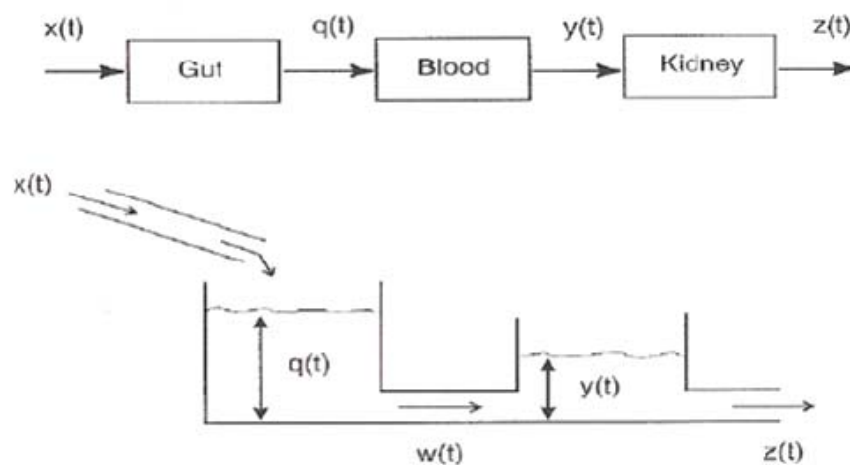



Figura 2.2.4. Sistema de três compartimentos modelizado por um sistema fluídico (Bruce, 2001).

Qual a vantagem das analogias intersistemas ? Normalmente um Engenheiro Biomédico tem facilidade em lidar com circuitos elétricos porque os estudou em Física, e em refletir sobre eles, mais do que com sistemas de outro tipo. Reduzindo um sistema qualquer a um circuito análogo elétrico, é possível estudar o sistema original como se de um circuito elétrico se tratasse.

Nos parágrafos seguintes estudaremos as noções básicas de sistemas elétricos, mecânicos (de translação e de rotação), térmicos, fluídicos, e químicos. Aplicando os princípios básicos de cada tipo, obteremos as respetivas equações diferenciais que descrevem as relações entre as suas variáveis. Comparando as equações diferenciais de dois tipos de sistemas deduziremos as respetivas analogias.

2.2. Sistemas elétricos

Um sistema elétrico representa-se normalmente por um conjunto de componentes associados às suas propriedades físicas: resistência, capacitância, indutância, fonte de tensão, fonte de corrente. Ligam-se esses componentes de acordo com as relações concretas no sistema, e obtém-se um circuito elétrico.

Cada tipo de componente tem a sua missão específica.

a) Resistência R

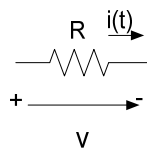



Figura 2.2.1 Resistência elétrica

Para a resistência R,

$$v(t) = \mathrm{R}\, i(t) \tag{2.2.1}$$

A energia dissipada é dada pelo efeito de Joule:

$$W_R = \mathrm{R}\, i(t)^2 \tag{2.2.2}$$

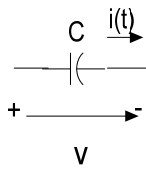
A resistência não armazena energia, dissipa-a apenas. Se se tirar do circuito nada permanece nela. É por isso um elemento dissipador de energia.

b) Capacidade (condensador) C

C i(t)

\+ -

V

Figura 2.2.3.
Capacidade elétrica C

Para o condensador de capacidade *C*,

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \qquad (2.2.3)$$

A energia armazenada num condensador é dada por (2.2.4)

$$W_C = \frac{1}{2}\mathrm{C}v^2 \ . \qquad (2.2.4)$$

Esta energia não depende da corrente, e permanece mesmo quando esta se extingue, mesmo quando se retira o condensador do circuito e se leva para casa.

A corrente no condensador é dada pela variação temporal da sua carga, ou seja, (2.2.5)

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \ . \qquad (2.2.5)$$

Mas como $Q=Cv$, substituindo, aplicando a regra da derivada do produto e atendendo a que Q é constante, temos (2.2.6)

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \ . \qquad (2.2.6)$$

Ou, resolvendo para a tensão, virá (2.2.7)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \ . \qquad (2.2.7)$$

Integrando ambos os lados da equação, dá (2.2.8),

$$v(t) = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t i(t)dt + v_o \qquad (2.2.8)$$

sendo 0 o instante inicial e v_0 a tensão inicial.

A tensão *v* no condensador depende da corrente nele acumulada. Se se retirar o condensador do circuito, depois de o carregar, a sua energia permanece nele. Por isso se pode chamar energia potencial, que se poderá usar colocando o condensador num circuito (tal como a energia hídrica contida numa barragem). Uma pilha vulgar é um condensador.

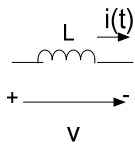
c) Indutância (bobina) L

Para a bobina L, temos a equação (2.2.9)

Figura 2.2.4.
Indutância elétrica

$$v(t) = \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} \quad . \tag{2.2.9}$$

Integrando agora ambos os lados da equação, dará (2.2.10),

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t)dt + i_0 \tag{2.2.10}$$

sendo 0 o instante inicial e i_0 a corrente inicial.

A energia armazenada numa bobina de indutância L é dada por (2.2.11),

$$W_L = \frac{1}{2}\mathrm{L}\,i^2 \tag{2.2.11}$$

e existe, portanto, apenas quando há circulação de corrente. Ela é armazenada no campo magnético criado pela corrente quando circula na bobina. Retirando a bobina do circuito, nada nela permanece. Por isso a sua energia pode-se chamar de cinética, por depender do movimento (da corrente de eletrões).

Muitos sistemas contêm os três tipos de elementos do circuito RLC: dissipador de energia (R), armazenador de energia potencial (C), e armazenador de energia cinética (L). Estes elementos recebem energia das fontes (de energia) do sistema. Em muitos casos poderemos reduzir os fenómenos no sistema a estas trocas (e dissipações) de energia. Um sistema requer normalmente, para ser estabilizável, um dissipador de energia.

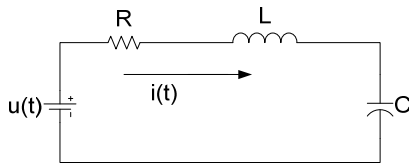



Figura 2.2.5. Um circuito RLC.

Para se obter um modelo matemático do circuito, aplicam-se as leis dos circuitos elétricos: de Ohm, de Kirchoff, do condensador e da bobina.

Lei de Kirchoff das tensões: **A soma das tensões é nula em qualquer malha fechada de um circuito elétrico**.

Exemplo 2.2.1.

Considere-se o ponto negro no circuito da Fig. 2.2.6 e uma malha fechada que dele parte e a ele regressa. Aplicando a lei de Kirchoff das tensões :

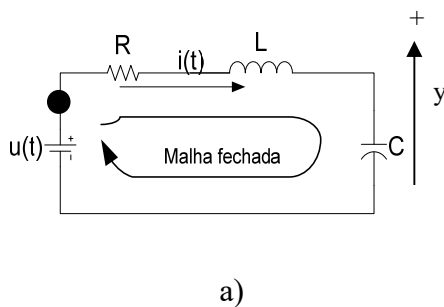



Figura 2.2.6. Lei de Kirchoff das tensões. a) circuito; b) lei de Kirchoff e sua aplicação.

Se o nosso interesse for a tensão no condensador C, então essa será a saída y do nosso sistema. Aplicando a cada elemento do circuito o que vimos anteriormente obtemos a parte b) da fig. 2.2.6.

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dy(t)}{dt} = \mathrm{C}\dot{y} \tag{2.2.14}$$

Derivando ambos os lados da equação (2.2.14),

$$\frac{di(t)}{dt} = \mathrm{C}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \mathrm{C}\ddot{y} \ . \tag{2.2.15}$$

Substituindo na equação da malha e simplificando a escrita obtemos (2.2.16)

$$\mathrm{RC}\,\ddot{y}+\mathrm{LC}\,\dot{y}+y-u=0\,. \qquad (2.2.16)$$

Ou dividindo por RC e simplificando, resulta em (2.2.17)

$$\ddot{y}+\frac{R}{L}\dot{y}+\frac{1}{LC}y=\frac{1}{LC}u\ . \qquad (2.2.17)$$

Obtemos assim uma equação diferencial de 2ª ordem que relaciona a entrada u do sistema (o circuito) com a sua saída y . Poderemos representar o circuito pelo diagrama de blocos seguinte

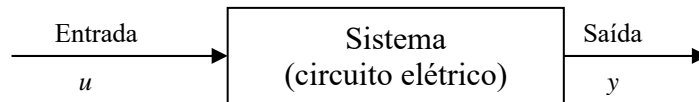



Figura 2.2.7. Sistema, entrada, saída.

Os elementos armazenadores de energia deste sistema são o condensador e a bobina. A resistência não armazena, dissipa.

Se quiséssemos guardar informação sobre o passado do circuito (a corrente que nele circulou) quais os elementos do circuito que o permitem fazer?

A carga atual do condensador é o efeito acumulado de todas as correntes que o atravessaram. Por isso se pode dizer que o condensador exprime, através da sua carga, o que é o mesmo que dizer através da sua tensão, (Q=CV) toda a história passada do ponto de vista da corrente (veja-se 2.2.8). O mesmo se pode dizer da corrente na bobina: ela é o efeito acumulado de todas as tensões ao longo do tempo (de 2.2.10). Quer dizer que esses dois componentes armazenadores de energia, o condensador e a bobina, contêm a história e, portanto, a memória do sistema.

Exemplo 2.2.2.

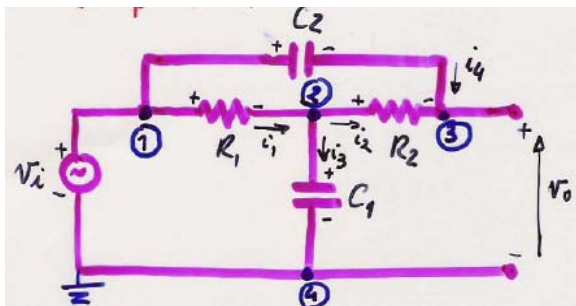



Figura 2.2.8. Exemplo 2.2.2

Seja o circuito da Fig. 2.2.8. Para o analisar aplique-se a **técnica dos nós.**

i) Seleciona-se um nó de referência (em geral um nó de massa).

ii) Escolhem-se como incógnitas as tensões nos outros nós.

iii) Escreve-se a equação das correntes de Kirchoff em cada um dos nós.

iv) Exprimem-se as correntes de iii) em função das incógnitas e dos parâmetros do circuito.

No caso da figura 2.2.8,

i) O nó da massa é o 4.

ii) As incógnitas serão as tensões v_2 no nó 2 e v_3 no nó 3.

iii) Equação no nó 2 : $i_1 = i_2 + i_3$.

Equação no nó 3: $i_2 + i_4 = 0$.

(Note-se que o número de equações de nó deve ser igual ao número de incógnitas).

iv) Calculando agora no circuito os valores das correntes em função das tensões nos nós,

$$i_1 + i_2 = i_3 \Leftrightarrow \frac{v_i - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} \tag{2.2.18}$$

$$i_2 + i_4 = 0 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_2 \frac{d(v_2 - v_3)}{dt} = 0 \tag{2.2.19}$$

obtêm-se duas equações diferenciais de primeira ordem lineares de coeficientes constantes.

Escrevendo-as em função de $v_{C_1} \triangleq v_2$ e de $v_{C_2} \triangleq v_1 - v_3$,
(agora $v_3 = v_i - v_{C_2}$)

$$\begin{cases} \dfrac{v_i - v_{C_1}}{R_1} = \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R} + C_1 \dfrac{dv_{C_1}}{dt} \\ \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R_2} + C_2 \dfrac{d(v_i - v_i + v_{C_2})}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (2.2.20)$$

$$\dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right) v_{C_2} + \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) v_i \qquad (2.2.21)$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{C_2 R_2} v_{C_1} - \frac{1}{C_2 R_2} v_{C_2} + \frac{1}{C_2 R_2} v_i \qquad (2.2.22)$$

2.3. Sistemas mecânicos de translação

Os sistemas mecânicos estão relacionados com o movimento de corpos. No caso do movimento de translação (retilíneo), temos um sistema mecânico de translação. Se o movimento é curvilíneo, rotativo, teremos um sistema mecânico de rotação. O corpo humano usa os dois tipos nas atividades quotidianas. O projeto de próteses médicas requer conhecimentos de sistemas mecânicos e por isso veremos algumas noções elementares.

Quando um corpo com uma certa massa se desloca sobre uma superfície plana, por exemplo, opõe-se-lhe uma força de atrito entre ele e a superfície. Esse atrito absorve parte da força (da energia) aplicada ao corpo. Tem por isso uma função de dissipação de energia.

Certos corpos têm a capacidade de se deformarem quando se lhe aplica uma força: por exemplo uma mola helicoidal comprime-se ou expande-se. Muitos corpos são deformáveis, alguns facilmente outros muito dificilmente. Para que essa deformação se verifique é necessário consumir energia. Mas se libertarmos o corpo ele retoma a forma inicial e devolve a energia de deformação. Na adolescência atirámos papelinhos aos nossos colegas de escola usando uma fisga de borracha: fornecíamos energia para deformar a borracha, libertávamo-la e ela entregava a energia ao papel imprimindo-lhe um movimento retilíneo de grande velocidade inicial. A propriedade que determina a deformação é a elasticidade dos corpos.

Aplicando forças a corpos teremos que considerar os seguintes elementos essenciais de um sistema mecânico:

- as forças aplicadas,
- a massa dos corpos,
- os atritos entre os corpos e as superfícies de deslocação,
- os coeficientes de elasticidade dos corpos.

Da aplicação de uma força resulta um movimento, definido em relação a um ponto de fixo de referência e de posição nula, representado pelas linhas oblíquas e vertical na Fig. 2.3.1.

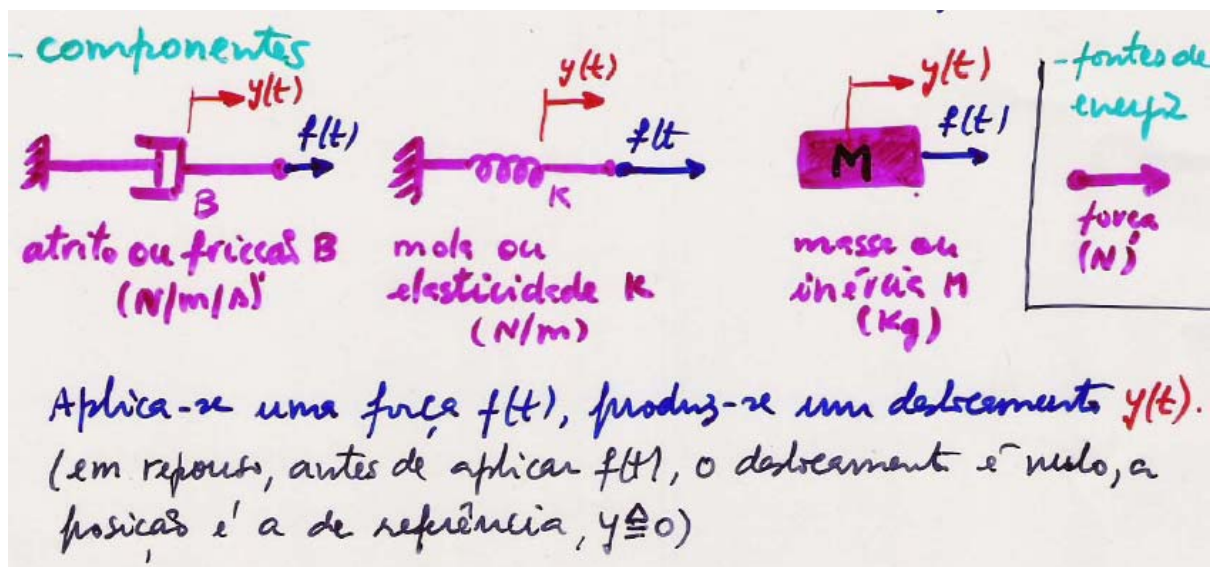
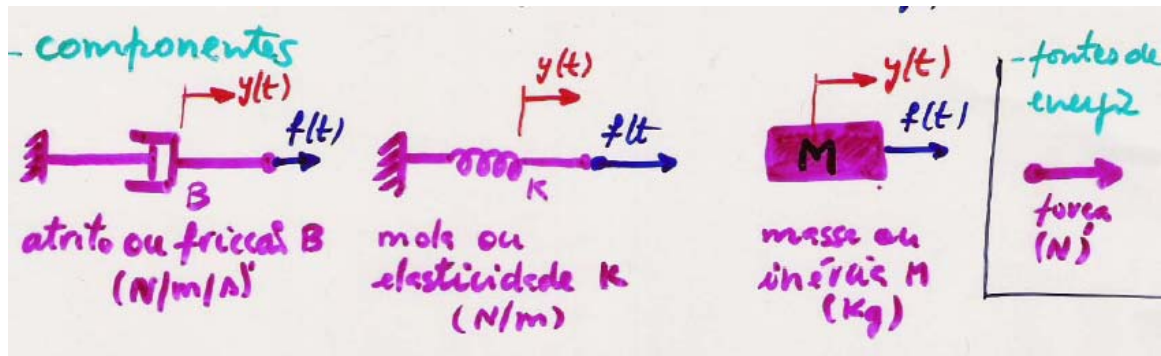



Figura 2.3.1. Os quatro elementos de um sistema mecânico de translação

Imaginando o movimento de um corpo sobre uma superfície, existe atrito em todos os pontos de contacto. Para simplificar a análise, representa-se o atrito em todos esses pontos por uma força concentrada num ponto aplicada ao corpo opondo-se ao seu movimento. Representa-se por um êmbolo (Figura 2.3.1a)), que funciona de modo análogo a uma seringa: existe uma fricção entre as paredes exterior e interior. Essa fricção representa o atrito. Uma extremidade do êmbolo não se desloca e por isso liga-se à referência; a outra extremidade liga-se à força que lhe é aplicada (normalmente por um corpo em deslocação).

O êmbolo, devido à força *f*(*t*), sofre um movimento de translação de posição *y*(*t*). A velocidade desta translação é proporcional à força.

Aplica-se uma força f(t), produz-se um deslocamento y(t).
(em repouso, antes de aplicar f(t), o deslocamento é nulo, a posição é a de referência, $y \triangleq 0$)

- leis

atrito B

$$f(t) = B\frac{dy(t)}{dt} \quad (2.3.1)$$

mola K

$$f(t) = K\,y(t) \quad (2.3.2)$$

massa M

$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt} \quad (2.3.3)$$

Se analisarmos os sistemas mecânicos de translação do ponto de vista da energia, concluiremos que há um dissipador de energia - o atrito B - e dois armazenadores de energia – a mola K e a massa M.

Para comprimir ou expandir a mola é necessária energia. Enquanto está deformada, a mola contém uma certa quantidade de energia, que devolve, sob a forma de movimento, quando é libertada. Portanto a mola, analogamente ao condensador, tem energia potencial.

A massa em movimento tem energia cinética. As quantidades de energia de cada um dos elementos são indicadas pelas fórmulas seguintes (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6).

- parâmetros: B, K, M
- armazenadores de energia

  mola : $e = \frac{1}{2} K y^2$ (potencial) (2.3.4)

  massa : $e = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (\dot{y})^2$ (cinética) Joules ou N-m (2.3.5)

- dissipador de energia

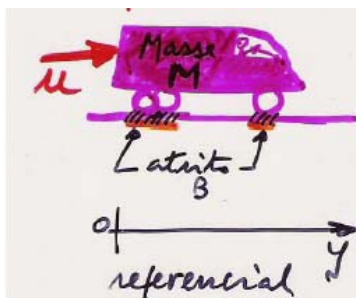
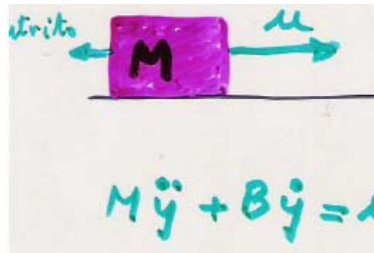
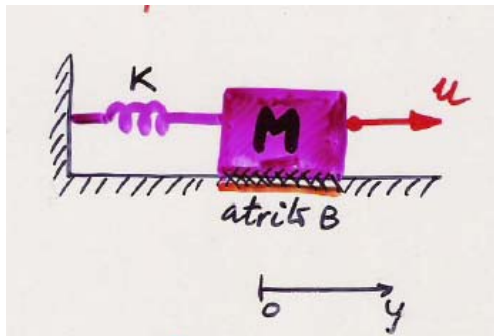
  atrito : $W = B v^2 = B(\dot{y})^2$ (N-m/s ou Watts) (potência) $e = \int W \cdot dt$ (2.3.6)

O princípio fundamental de análise dos sistemas mecânicos é enunciado pele Lei de Newton: a soma das forças aplicadas a um corpo de massa M - a força resultante - produz neste um movimento de aceleração. A força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração.

lei de Newton (eq. de movimento)

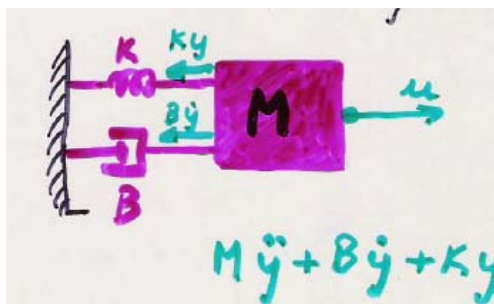
$$F = M \cdot a \qquad (2.3.7)$$

- F: soma de todas as forças aplicadas ao corpo de massa M (N)
- M: massa do corpo (Kg)
- a: aceleração a que o corpo é submetido (m/s²)

Exemplo 2.3.1 Deslocamento de um veículo.

Considere-se um automóvel de massa M, apoiado num plano com atrito, elasticidade nula (o que é de facto praticamente verdade). Aplicando-lhe uma força u ele desloca-se no plano segundo a Lei de Newton.

Pode-se representar pela figura seguinte e escrever a lei de Newton (2.3.9).

Lei de Newton

$$u - B\dot{y} = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + B\dot{y} = u \qquad (2.3.9)$$

Exemplo 2.3.2 Deslocamento de uma massa com atrito e elasticidade.

(2.3.10)

(2.3.11)

A elasticidade é representada pela mola K ligada à referência.

Lei de Newton

$$u - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u \qquad (2.3.12)$$

Exemplo 2.3.3 Suspensão de um automóvel

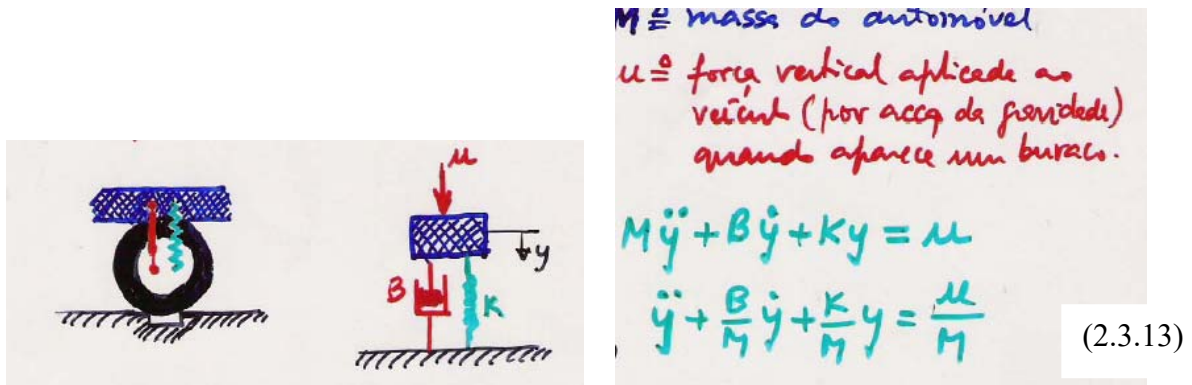
Quando a roda de um automóvel cai num buraco é sujeita a um movimento vertical devido à força da gravidade. Esquecendo, para análise, o movimento horizontal, o automóvel pode ser representado por uma massa M com um atrito e uma mola a ligá-la à referência (o solo, que não se desloca). A mola e o atrito são característicos da suspensão. A arte de construção da suspensão está na determinação desses valores. Uma suspensão sem atrito oscilaria para sempre, uma suspensão sem mola seria muito "dura" pois não oscilaria. Uma suspensão confortável deve ser oscilatória, mas não muito.

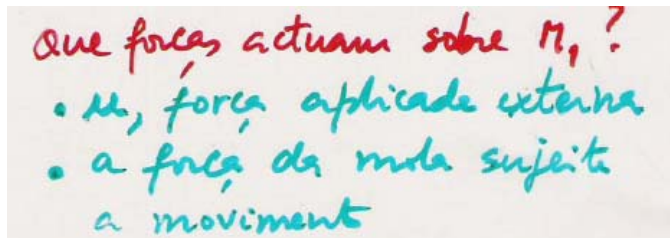
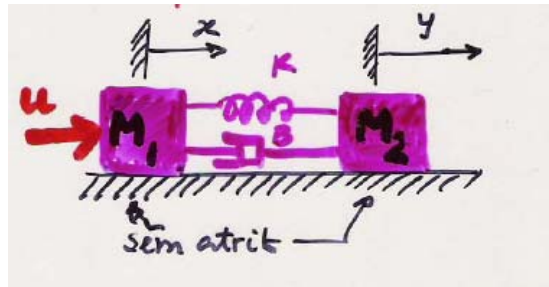
Calculando a equação diferencial do carro-suspensão,

M ≙ massa do automóvel

u ≙ força vertical aplicada ao veículo (por acção da gravidade) quando aparece um buraco.

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{u}{M} \qquad (2.3.13)$$

Obtém-se uma equação diferencial de 2ª ordem linear de coeficientes constantes.

Exemplo 2.3.4 Duas massas interligadas por mola e atrito.

Aqui é um pouco mais complicado, dado que as massas estão ligadas entre si por atrito e elasticidade. Tem que se considerar uma massa de cada vez, e considerar todas as forças que lhe são aplicadas. Os deslocamentos das massas são x e y , diferentes entre si. O que tem que se considerar para calcular a força do atrito e a força da elasticidade é a diferença (x-y).

Depois aplica-se a lei de Newton a cada uma delas, como se faz de seguida.

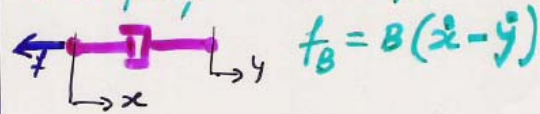
$$f_{mola} = K(x-y)$$

• a força do atrito, contra o mov.

$$f_B = B(\dot{x}-\dot{y}) \qquad (2.3.15)$$

Lei de Newton a M_1

$$u - K(x-y) - B(\dot{x}-\dot{y}) = M_1\ddot{x} \qquad (2.3.14)$$

$$M_1\ddot{x} + B(\dot{x}-\dot{y}) + K(x-y) = u$$

Que forças actuam sobre M_2?

• não há forças exteriores

• a força da mola

$$f_{mola} = K(x-y) \qquad (2.3.17)$$

• a força do atrito

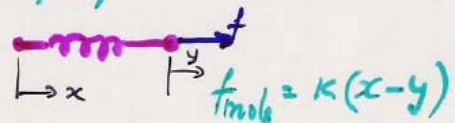
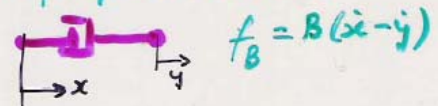
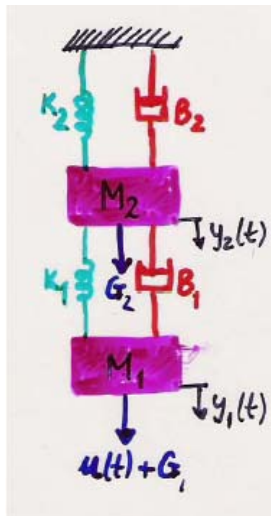
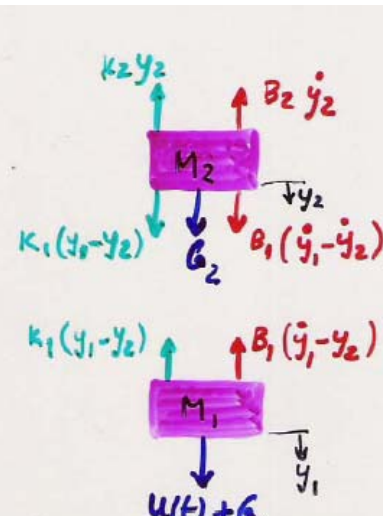
$$f_B = B(\dot{x}-\dot{y}) \qquad (2.3.18)$$

Lei de Newton a M_2

$$K(x-y) + B(\dot{x}-\dot{y}) = M_2\ddot{y} \qquad (2.3.16)$$

$$M_2\ddot{y} - B(\dot{x}-\dot{y}) - K(x-y) = 0$$

$$M_2\ddot{y} + B(\dot{y}-\dot{x}) + K(y-x) = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{B}{M_1}(\dot{x}-\dot{y}) + \dfrac{K}{M_1}(x-y) = \dfrac{u}{M_1} & (2.3.20) \\ \ddot{y} + \dfrac{B}{M_2}(\dot{y}-\dot{x}) + \dfrac{K}{M_2}(y-x) = 0 & (2.3.21) \end{cases}$$

Obtêm-se duas equações diferenciais de 2ª ordem de coeficientes constantes. Note-se que as equações estão acopladas, isto é, x entra na de y'' e y entra na de x''.

Veremos que uma equação diferencial de segunda ordem pode-se reduzir a duas equações diferencias de primeira ordem. E em geral uma equação diferencial de ordem n pode-se reduzir a n equações diferenciais de 1ª ordem, o que é útil como veremos no Cap. 4.

Exemplo 2.3.5

$$G_2 = M_2 g \qquad (2.3.22)$$

$$G_1 = M_1 g \qquad (2.3.23)$$

Lei de Newton a M_1

$$u(t) + M_1 g = M_1 \ddot{y}_1(t) + B_1\left[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\right] + K_1\left[y_1(t) - y_2(t)\right] \qquad (2.3.24)$$

Lei de Newton a M_2

$$M_2 g + B_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_1(y_1 - y_2) - B_2 \dot{y}_2 - K_2 y_2 = M_2 \ddot{y}_2 \qquad (2.3.25)$$

(nota para simplificar escreve-se y em vez de $y(t)$, etc.)

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \dfrac{B_1}{M_1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \dfrac{K_1}{M_1}(y_1 - y_2) = \dfrac{u}{M_1} + g & (2.3.26) \\[2ex] \ddot{y}_2 - \dfrac{B_1}{M_2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \dfrac{B_2}{M_2}\dot{y}_2 - \dfrac{K_1}{M_2}(y_1 - y_2) + \dfrac{K_2}{M_2} y_2 = g & (2.3.27) \end{cases}$$

Sistema de duas equações diferenciais de 2ª ordem, lineares, de coeficientes constantes, redutível a um sistema de quatro equações diferenciais de 1ª ordem.

Comparação com os sistemas elétricos

Se observarmos com atenção as equações dos elementos dos sistemas elétricos e dos sistemas mecânicos de translação verificaremos que têm uma forma semelhante. As variáveis que ocupam posições análogas chamam-se variáveis análogas.

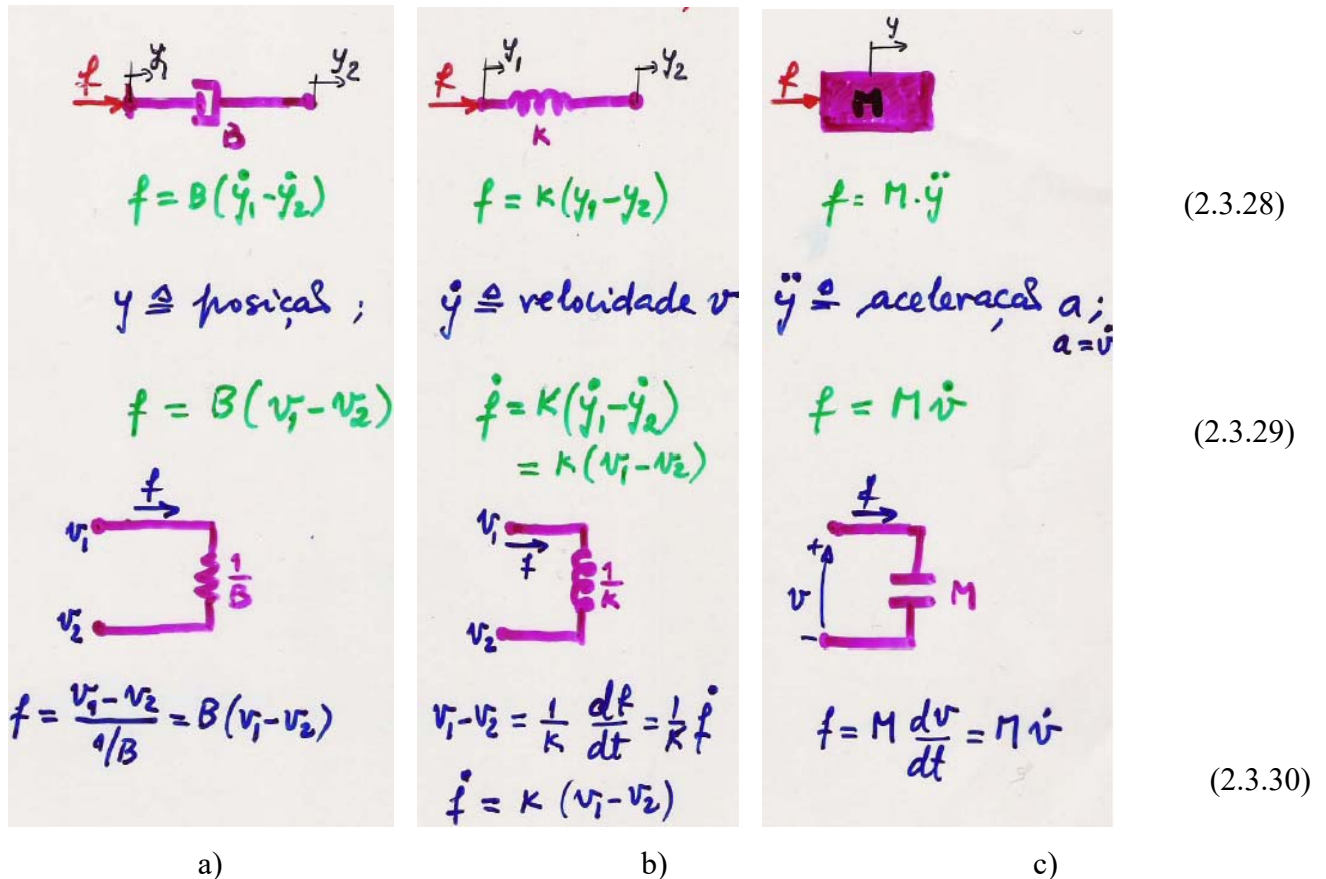



Figura 2.3.10. Analogias entre os elementos dos sistemas elétricos e dos sistemas mecânicos. A corrente elétrica está representada por *f*, para evidenciar as analogias das equações. A velocidade e a tensão estão ambas representadas por *v*.

mecânico		elétrico	
atrito	B	condutância	$G = 1/R$
massa	M	capacidade	C
mola	K	indutância^{-1}	$1/L$
força	f	corrente	i
velocidade	v	tensão	v

Tabela 2.3.1 Analogias elétrico-mecânico.

2.4. Sistemas mecânicos de rotação

Se o movimento de um corpo é rotativo, ele será descrito por um sistema mecânico de rotação. Teremos aqui binário em vez de força, momento de inércia em ver de massa, atrito ou fricção rotativa. Os símbolos usados são os da Figura 2.4.1.

No êmbolo do atrito o pistão interior gira, e entre as duas superfícies existe uma fricção B.

A elasticidade está relacionada com a torção (e não com a expansão ou compressão). O momento de inércia J está relacionado com a inércia que o corpo opõe ao binário.

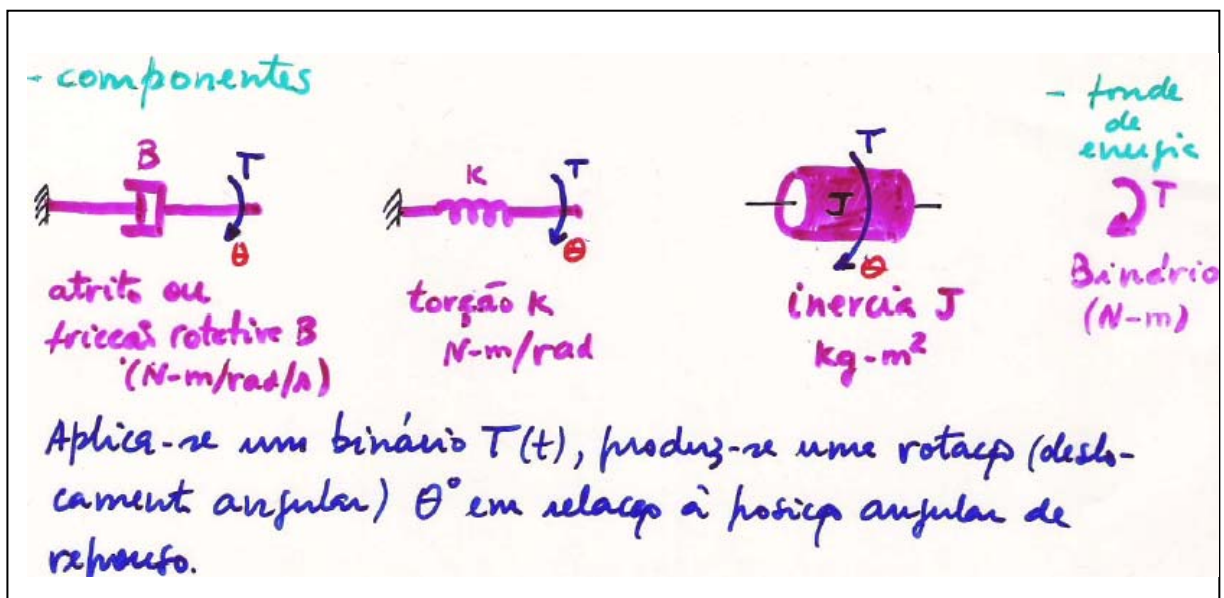



Figura 2.4.1. Elementos dos sistemas mecânicos de rotação

- leis

fricção B

$$T(t) = B\,\frac{d\theta(t)}{dt} = B\,\omega(t) \qquad (2.4.1)$$

torção K

$$T(t) = K\,\theta(t) \qquad (2.4.2)$$

inércia J

$$T(t) = J\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = J.\alpha(t) \qquad (2.4.3)$$

Do ponto de vista da energia, teremos uma situação semelhante à dos sistemas mecânicos de translação. O atrito é o elemento dissipador, a massa e a mola armazenam energia cinética e potencial, respectivamente.

- parâmetros: B, K, J
- armazenadores de energia:

torção: $e = \frac{1}{2} K \theta^2$ (potencial) (2.4.4)

inércia: $e = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (\dot{\theta})^2$ (cinética). (Joule ou N-m) (2.4.5)

- dissipador de energia:

fricção rotativa: $W = B \omega^2 = B (\dot{\theta})^2$ (N-m/s ou Watt) (potência)

$e = \int W . dt$ (2.4.6)

O princípio fundamental da análise é a Lei de Newton (para o movimento rotativo): o binário resultante é igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular.

Lei de Newton

$$T = J . \alpha \quad (2.4.7)$$

T: soma de todos os binários aplicados (em relação ao eixo fixo do corpo). J: momento de inércia do corpo. α: aceleração angular.

Exemplo 2.4.1. Disco suspenso por um eixo fixo na outra extremidade.

Um disco é suspenso através de um eixo com uma certa torção. Ao disco é aplicado um binário, rodando o disco encostado a uma superfície com um certo atrito.

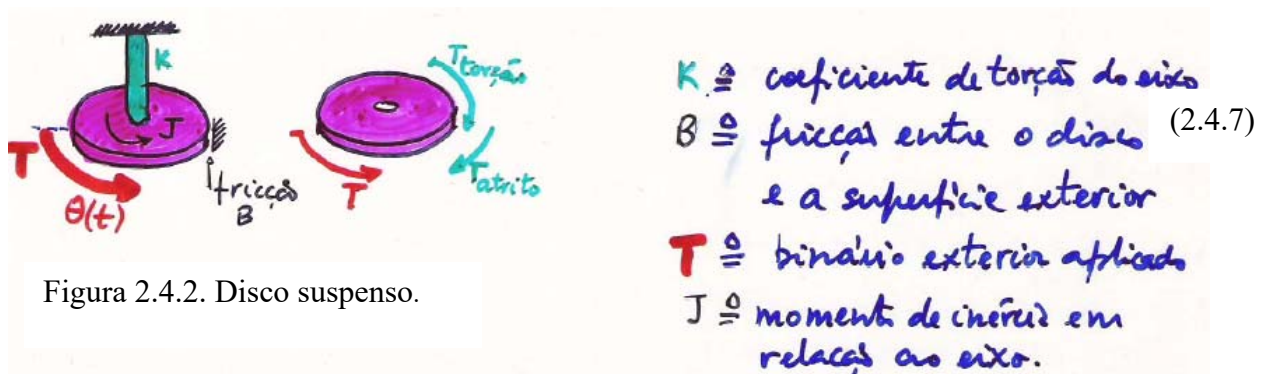



Figura 2.4.2. Disco suspenso.

Quais são os binários plicados ao disco ?

- binário exterior T(t)

- binário resultante da torção do eixo

$$T_{torção} = K\,\theta(t) \tag{2.4.8}$$

- binário devido ao atrito *B*,

$$T_{atrito} = B\dot{\theta}(t) = Bw(t) \tag{2.4.9}$$

Lei de Newton aplicada ao disco

$$T - T_{torção} - T_{atrito} = J\ddot{\theta} \tag{2.4.10}$$

$$T - K\theta - B\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{T}{J} \tag{2.4.11}$$

E em (2.4.11) obtemos uma equação diferencial de 2ª ordem, linear invariante.

Exemplo 2:4.2. Motor com carga acoplada.

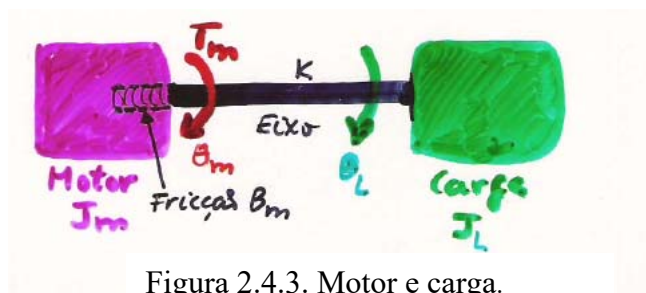
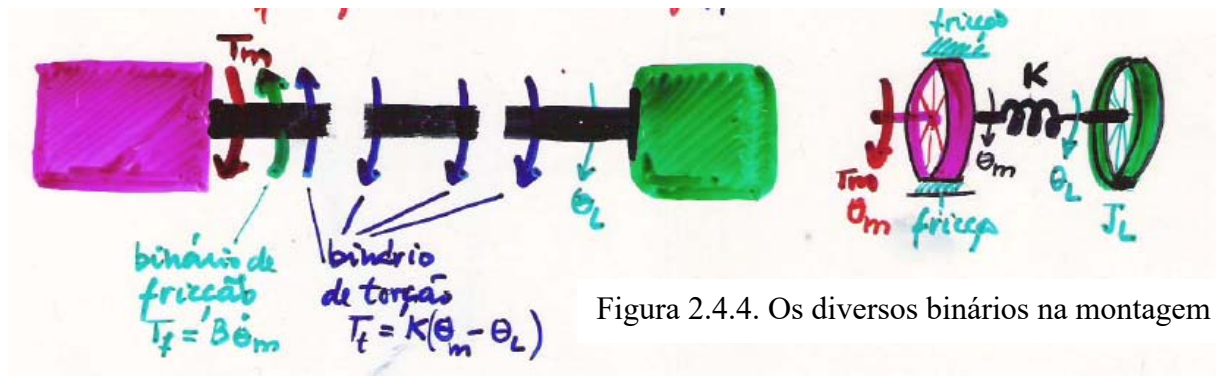



Figura 2.4.3. Motor e carga.

O motor aplica T_m ao eixo. Este opõe-se-lhe com o binário de torção mais o binário de atrito.

O eixo aplica à carga o seu binário de torção. É este que produz a rotação da carga (se o coeficiente de torção K fosse nulo, não era possível transmitir qualquer binário à carga)

T_m ≙ binário do motor
J_m ≙ momento de inércia do motor + eixo
B_m ≙ coef. de fricção interna do motor
K ≙ coef. de torção do eixo
J_L ≙ momento de inércia da carga
θ_m ≙ deslocamento angular do motor
θ_L ≙ desloc. ang. da carga

Figura 2.4.4. Os diversos binários na montagem

Lei de Newton aplicada ao motor

$$T_m - B\dot{\theta}_m - K(\theta_m - \theta_L) = J_m \ddot{\theta}_m \qquad (2.4.11)$$

Lei de Newton aplicada à carga

$$K(\theta_m - \theta_L) = J_L \ddot{\theta}_L \qquad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}_m + \frac{B}{J_m}\dot{\theta}_m + \frac{K}{J_m}(\theta_m - \theta_L) = \frac{T_m}{J_m} \\ &\ddot{\theta}_L - \frac{K}{J_L}(\theta_m - \theta_L) = 0 \end{aligned} \qquad (2.4.13)$$

Em (2.4.13) temos duas equações lineares de 2ª ordem, de coeficientes constantes, redutíveis a 1 equação diferencial de 4ª ordem ou a 4 de 1ª ordem.

Exemplo 2.4.3: Orientação de um satélite

As antenas de um satélite de telecomunicações têm que estar bem orientadas em relação à estação terrestre. Se por qualquer razão o satélite gira indevidamente em torno do seu eixo, perde-se o contacto.

Por isso os satélites estão equipados com mecanismos que lhes permitem (sob controlo terrestre) orientarem-se segundo as três coordenadas espaciais. Em relação a um eixo perpendicular à página, passa-se como ilustrado na Fig. 2.4.5.

Os propulsores aplicam um binário de rotação, em ambos os sentidos, conforme são disparados.

Admite-se que não há atrito e que o corpo do satélite é rígido (não se deforma), tendo o satélite um momento de inércia J.

Assim a Lei de Newton aplicada ao satélite é (2.4.14).

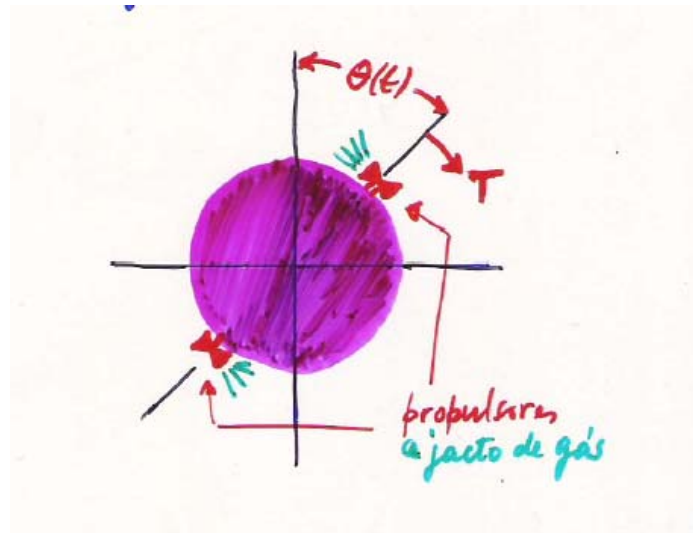



Figura 2.4.5. Orientação de um satélite.

$$T = J\ddot{\theta} \tag{2.4.14}$$

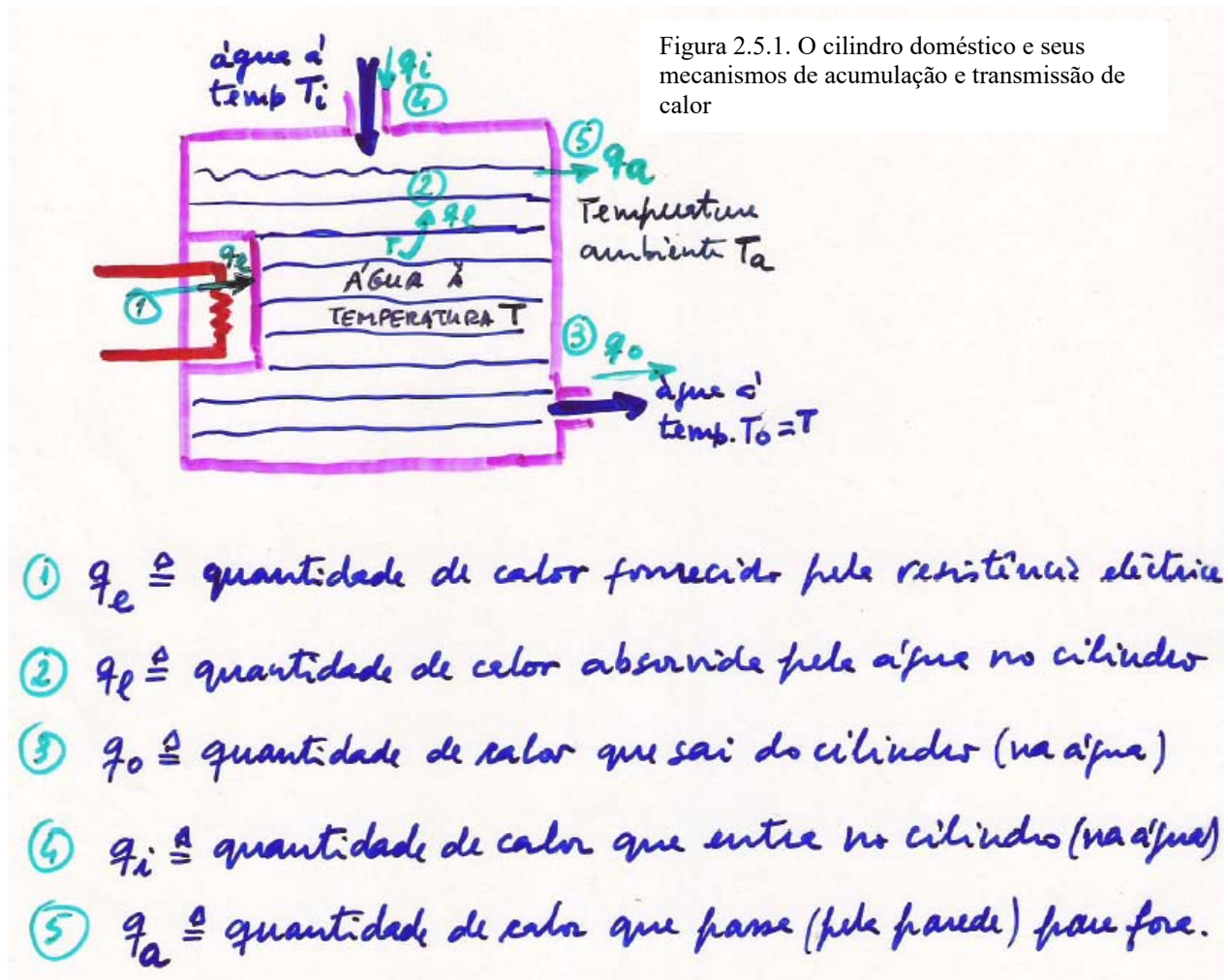
2.5 Sistemas térmicos

Nos sistemas térmicos a energia existe sob a forma de calor. Armazena-se em alguns elementos, transmite-se entre os elementos. Para os analisar usam-se os princípios de conservação da energia: a energia não desaparece, é armazenada no sistema ou transmitida entre este e o ambiente.

Exemplo 2.5.1. Cilindro doméstico

Num cilindro doméstico, funcionando a electricidade, aquece-se e armazena-se água. Na figura 2.5.1 representam-se as transmissões de energia térmica (calor) entre as diversas partes do sistema e o ambiente.

Figura 2.5.1. O cilindro doméstico e seus mecanismos de acumulação e transmissão de calor

Por unidade de tempo

perdendo-se no ambiente

Aplicando o

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\underbrace{q_e + q_i}_{\text{calor que entra}} = \underbrace{q_l}_{\text{calor que fica}} + \underbrace{q_0 + q_a}_{\text{calor que sai}} \qquad (2.5.1)$$

Substituindo agora as expressões de cada uma das parcelas, à esquerda e à direita desta equação (2.5.1) obtém-se a equação diferencial da variação da temperatura da água do cilindro.

cálculo dos diversos q's

- q_e : fornecido pela resistência eléctrica em cada instante,

$$q_e = R i^2 \triangleq u \qquad (2.5.2)$$

- q_ℓ : absorvido pela água no cilindro durante um intervalo de tempo Δt

$$q_\ell \cdot \Delta t = M.c.\Delta T \qquad (2.5.3)$$

M: massa da água; c: calor específico da água; ΔT: variação de temp. da água

$$q_\ell = M.c.\frac{\Delta T}{\Delta t} \xrightarrow{\lim \Delta t \to 0} q_\ell = Mc\frac{dT}{dt} \qquad (2.5.4)$$

- q_i : fornecido na água que entra com caudal V(kg/s) à temperatura T_i

$$q_i = V.c.T_i \qquad (2.5.5)$$

- q_o : sai, com a água, do cilindro

$$q_o = V.c.T \qquad (2.5.6)$$

(admitindo que o caudal V de saída é igual ao de entrada)

- q_a : perde-se para o ambiente através da parede

$R \triangleq$ resistência térmica da parede

T | T_a → q_a

$$q_a = \frac{T - T_a}{R} \qquad (2.5.7)$$

substituindo na equação (2.5.1) do balanço de energia

$$u + V\cdot c\cdot T_i = M\cdot c\cdot \frac{dT}{dt} + V\cdot c\cdot T + \frac{T-T_a}{R} \qquad (2.5.8)$$

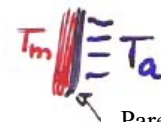
$$\dot{T} + \left(\frac{1}{RMc} + \frac{V}{M}\right)T = \frac{1}{Mc}u + \frac{V}{M}T_i + \frac{V}{R.M.c}T_a \qquad (2.5.9)$$

Exemplo 2.5.2: Termómetro de mercúrio

Figura 2.5.2. O termómetro de mercúrio

quantidade de calor transmitida ao mercúrio em cada instante:

$$q(t) = \frac{T_a - T_m(t)}{R} \qquad (2.5.10)$$

Tm Ta

Parede do termómetro de resistência térmica R

incremento da temperatura do mercúrio

$T_m(0) \triangleq$ temperatura inicial do mercúrio

$T_m(t) - T_m(0) \triangleq$ incremento da temperatura

$C \triangleq$ capacidade térmica do mercúrio (total)

$C\cdot T_m(t) \triangleq$ quantidade de calor contida no mercúrio

$C.(T_m(t) - T_m(0)) \triangleq$ quantidade de calor absorvida pelo mercúrio desde 0 até t

R : resistência térmica da parede do termómetro.

(2.5.10)

balanço de energia

$$\underbrace{q(t)\cdot\Delta t}_{\text{quantidade de calor fornecida através da parede}} = \underbrace{\Delta[C\cdot T_m(t)]}_{\text{incremento da quantidade de calor contido no mercúrio}} = C\cdot\Delta T_m(t) \quad (2.5.11)$$

$$\frac{T_a - T_m}{R} = C\,\frac{\Delta T_m}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} RC\,\dot{T}_m + T_m = T_a \quad (2.5.12)$$

$$\dot{T}_m + \frac{1}{RC}T_m = \frac{1}{RC}T_a \quad (2.5.13)$$

Comparação com os eléctricos:

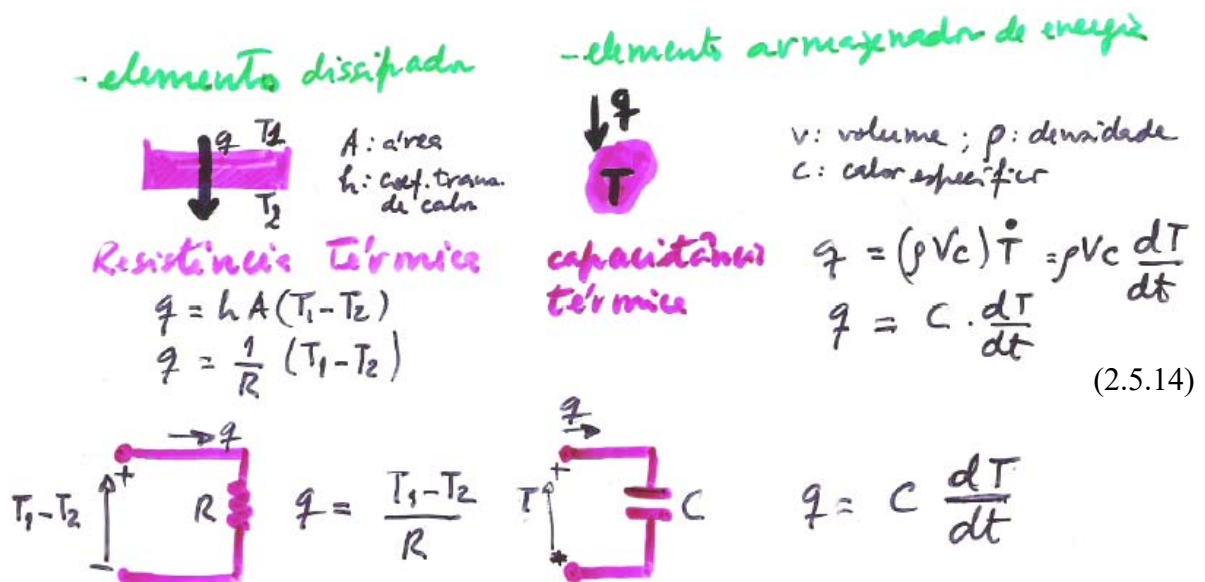



Figura 2.5.4. Componentes análogos eléctricos e térmicos

Térmico	↔	Eléctrico
resistência térmica R	↔	resistência eléctrica R
capacidade térmica C	↔	capacidade eléctrica C
temperatura T	↔	potencial v
fluxo de calor, q	↔	corrente i

Tabela 2.5.1. Analogias elétrico-térmico

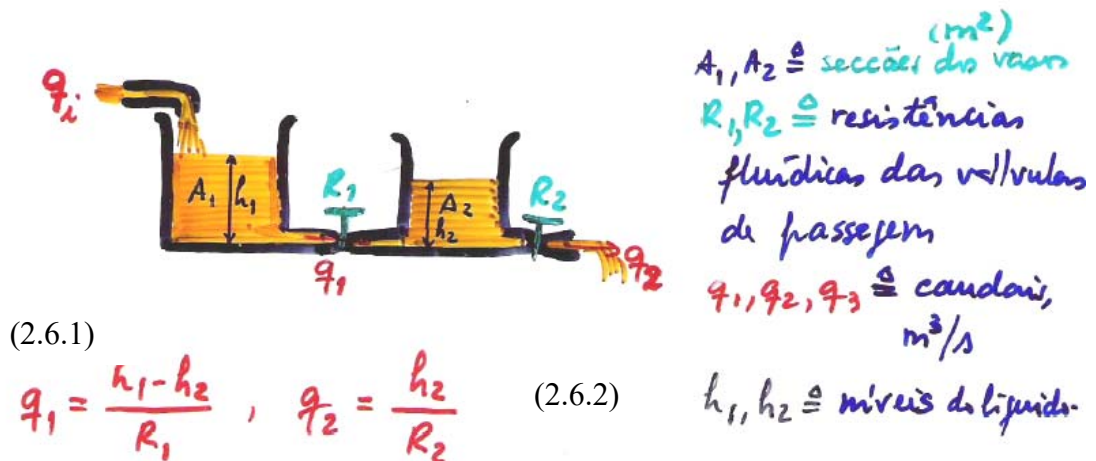
Dois sistemas dizem-se análogos se, sendo de natureza energética diferente, têm a mesma estrutura (os seus componentes têm funções análogas e sinais análogos) e as suas equações diferenciais têm a mesma forma.

Dois sinais são análogos se, embora de natureza diferente (corrente, calor, …) têm a mesma evolução temporal resultante da resolução das respectivas equações diferenciais: se as graficarmos obteremos as curvas com a mesma forma, eventualmente noutra escala. As unidades das grandezas são as próprias de cada sistema.

Dois componentes são análogos se exercem sobre os respectivos sinais o mesmo efeito.

2.6 Sistemas fluídicos

Nos sistemas fluídicos circulam fluidos (líquidos e gases). Iremos ter em consideração sobretudo o caso dos líquidos. O princípio fundamental de análise é o princípio da conservação de massa: líquido não desaparece, ou é armazenado no sistema ou trocado entre este e o ambiente.

Exemplo 2.6.1 Dois tanques comunicantes através de uma válvula.

Durante um intervalo de tempo Δt, em cada vaso entrou e saiu uma certa quantidade de líquido. No vaso 1 entra q_i e sai q_1; se o primeiro é maior do que o segundo, o nível aumenta. No vaso 2 entra q_1 e sai q_2; se q_2 é maior do que q_1 o nível diminui.

Os canais de comunicação tendem a criar dificuldades à passagem do líquido; por isso têm resistência fluídica R_1 e R_2. O funcionamento de uma válvula de abertura variável baseia-se nesse facto: diminuindo a abertura da passagem, aumenta a resistência e diminui o caudal.

Para uma certa abertura constante, o caudal depende da diferença das pressões entre os dois lados do canal de comunicação. E as pressões são proporcionais ao nível h, se a secção do vaso for constante.

Por isso os níveis variaram Δh_1 e Δh_2 e os volumes variam $A_1\Delta h_1$ e $A_2\Delta h_2$

Para o vaso 1 : $A_1 \Delta h_1 = q_i \Delta t - q_1 \Delta t$ (2.6.3)

aumento de volume = ao que entrou − o que saiu

Para o vaso 2 : $A_2 \Delta h_2 = q_1 \Delta t - q_2 \Delta t$ (2.6.4)

Dividindo as equações por Δt e aplicando o limite quando $\Delta t \to 0$,

$$A_1 \frac{\Delta h_1}{\Delta t} = q_i - q_1 \qquad \lim_{\Delta t \to 0} A_1 \frac{\Delta h_1}{\Delta t} = q_i - q_1 \tag{2.6.5}$$

$$A_2 \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = q_1 - q_2 \qquad \lim_{\Delta t \to 0} A_2 \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = q_1 - q_2 \tag{2.6.6}$$

Mas atendendo agora à definição de derivada,

$$A_1 \dot{h}_1(t) = q_i(t) - q_0(t) \tag{2.6.7}$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \tag{2.6.8}$$

obtém-se um sistema de duas equações diferenciais lineares de 1ª ordem de coeficientes constantes.

Estas duas equações podem-se reduzir a uma equação diferencial de 2ª ordem. De facto,

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad , \quad q_2 = \frac{h_2}{R_2} \qquad (2.6.9)$$

Derivando agora (note-se que R_1 e R_2 são constantes), obtém-se sucessivamente

$$R_1 \dot{q}_1 = \dot{h}_1 - \dot{h}_2 \qquad R_2 \dot{q}_2 = \dot{h}_2 \qquad (2.6.10)$$

$$\dot{h}_1 = R_1 \dot{q}_1 + R_2 \dot{q}_2 \qquad (2.6.11)$$

$$A_1 R_1 \dot{q}_1 + A_1 R_2 \dot{q}_2 = q_i - q_1 \qquad (2.6.12)$$

$$A_2 R_2 \dot{q}_2 = q_1 - q_2 \Rightarrow q_1 = A_2 R_2 \dot{q}_2 + q_2$$

$$\dot{q}_1 = A_2 R_2 \ddot{q}_2 + \dot{q}_2 \qquad (2.6.13)$$

$$A_1 A_2 R_1 R_2 \ddot{q}_2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2) \dot{q}_2 + q_2 = q_i \qquad (2.6.14)$$

q_i → SISTEMA FLUÍDICO → q_2

até que (2.6.14) é a equação diferencial que relaciona o caudal de saída q_2 como caudal de entrada q_i

Reparando na expressão

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad (2.6.15)$$

vemos uma analogia com a lei de Ohm, se a tensão for análoga ao nível, a corrente análoga ao caudal, a resistência elétrica análoga à resistência fluídica.

Num sistema fluídico líquido os elementos armazenadores de energia são aqueles em que o líquido se pode acumular, como numa barragem. Um vaso com um certo nível *h* tem energia

potencial: se abrirmos uma saída no fundo sai um jacto de água capaz de produzir trabalho (é esse o princípio das barragens). Portanto o nível h exprime energia potencial.

2.7. Analogias entre os diversos tipos de sistemas

Entre os diversos tipos de sistemas estudados até aqui existe uma relação de analogia, no sentido de que se pode representar, por exemplo, um sistema mecânico por um sistema eléctrico cujos componentes são numericamente iguais (nas unidades respectivas) e cujas variáveis seguem trajectórias iguais na forma. A tabela seguinte sintetiza essas relações.

As variáveis circulantes têm valores instantâneos medidos num local. As variáveis diferenciais medem-se tomando em consideração dois locais, isto é, requerem um ponto de referência. Elas entram ao quadrado na determinação da energia existente no sistema.

Tabela de analogias

	ELÉCTRICOS	MECÂ. TRANSL	MECÂ. ROTAÇ	FLUÍDICOS	TÉRMICOS
DISSIPADOR DE ENERGIA	R Ω $Ri^2 = \frac{v^2}{R}$	B^{-1} Bv^2	B^{-1} $B\omega^2$	R	R
ARMAZENA. DE ENERGIA	L Henry cinética $\frac{1}{2}Li^2$	K^{-1} potencial $\frac{1}{2}Ky^2$	K^{-1} $\frac{1}{2}K\theta^2$		
	C Farad potencial $\frac{1}{2}Cv^2$	M cinética $\frac{1}{2}Mv^2$	J $\frac{1}{2}J\omega^2$	h potencial $\frac{1}{2}Ch^2$	C potencial $\frac{1}{2}CT^2$
VARIÁVEL CIRCULANTE	i amperes	f	T (binário)	q	q
VARIÁVEL DIFERENCIAL	v volts	v	ω	h	T (Temperatura)

Tabela 2.7.1. Analogias entre os cinco tipos de sistemas estudados até aqui.

O conceito de energia unifica a análise de sistemas.

Veremos posteriormente que estas analogias são muito úteis, por exemplo nos sistemas fisiológicos, facilitando a sua análise.

2.8 Sistemas químicos

A modelização matemática dos processos químicos envolve os princípios básicos de termodinâmica, cinética, fenómenos de transporte, etc.

Um sistema químico recebe materiais e energia do exterior, fornece materiais e energia ao exterior e dentro dele acontecem reações químicas.

Para escrevermos as suas equações aplica-se o princípio geral de conservação de massa e de energia (nada se perde, tudo se transforma).

Imaginemos um sistema químico a funcionar. Durante um certo intervalo de tempo Δt entram produtos, saem produtos, geram-se produtos dentro do sistema, consomem-se produtos dentro do sistema, acumulam-se produtos dentro do sistema. Admitindo que Δt é pequeno, poderemos escrever para um componente S do sistema o princípio de conservação, dado pela equação de balanço seguinte (2.8.1)

Durante o intervalo de tempo Δt,

$$\begin{bmatrix}\text{acumulação de S}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}\Delta t-\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{fora do sistema}\end{bmatrix}\Delta t+\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{gerada no sistema}\end{bmatrix}\Delta t-\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{consumida no sistema}\end{bmatrix}\Delta t \tag{2.8.1}$$

Se dividirmos ambos os lados da equação (2.8.1) por Δt, obtém-se (2.8.2).

$$\frac{\begin{bmatrix}\text{acumulação de S}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}}{\Delta t}=\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{fora do sistema}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{gerada no sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{consumida no sistema}\end{bmatrix} \tag{2.8.2}$$

Aplicando o limite quando Δt →0, vem (2.8.3) por definição de derivada.

$$\frac{d\begin{bmatrix}\text{acumulação de S}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}}{dt}=\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{dentro do sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{fluxo de S para}\\\text{fora do sistema}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{gerada no sistema}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{quantidade de S}\\\text{consumida no sistema}\end{bmatrix} \tag{2.8.3}$$

S pode ser a massa total, a massa de um componente individual, a energia total.

Assim, para um sistema químico genérico, poderemos escrever

Balanço mássico total:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i:entradas} \rho_i F_i - \sum_{j:saídas} \rho_j F_j \qquad (2.8.4)$$

Balanço mássico para o componente A:

$$\frac{d(n_A)}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = \sum_{i:entradas} c_{A_i} F_i - \sum_{j:saídas} c_{A_j} F_j \pm rV \qquad (2.8.5)$$

Balanço energético total:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U+K+P)}{dt} = \sum_{i:entradas} \rho_i F_i h_i - \sum_{j:saídas} \rho_j F_j h_j \pm Q \pm W_s \qquad (2.8.6)$$

em que

$\rho \triangleq$ densidade do material do sistema
$\rho_i \triangleq$ densidade do material do fluxo de entrada i
$\rho_j \triangleq$ dendidade domaterial do fluxo de saída j
$V \triangleq$ volume total do sistema
$F_i \triangleq$ caudal volumétrico da entrada i
$F_j \triangleq$ caudal volumétrico da saída j
$n_A \triangleq$ número de moles do componente A no sistema
$c_A \triangleq$ concentração molar (moles/volume) de A no sistema
$c_{A_i} \triangleq$ concentração molar de A na entrada i
$c_{A_j} \triangleq$ concentração molar de A na saída j
$r \triangleq$ taxa de reacção por unidade de volume para o componente A no sistema
$h_i \triangleq$ entalpia esecífica do material na entrada i
$h_j \triangleq$ entalpia específica do material na saída j
$U, K, P \triangleq$ energia interna(U), cinética(K) e potencial (P)
$Q \triangleq$ quantidade de energia trocada entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo
$W_s \triangleq$ trabalho (shaft work) trocado entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo

Aplicando a um sistema qualquer obtêm-se equações diferenciais de 1ª ordem, que constituem o seu modelo matemático.

Exemplo 2.8.1. Aquecimento de um tanque bem agitado (*stirred-tank*) (de Stephanopoulus)

Seja um tanque que está a ser alimentado por um caudal de líquido F_i (m^3/min) à temperatura T_i (ºC). No tanque é aquecida por uma serpentina a vapor onde entra um caudal de vapor de F_v kg/min. Do tanque sai um caudal F de líquido à temperatura T. O tanque está bem agitado e por isso a temperatura da saída é iguala temperatura dentro do tanque. O vapor de aquecimento, ao perder energia na serpentina condensa, saindo o condensado para o exterior.

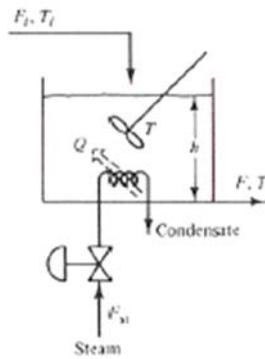



Figura 2.8.1 Um tanque bem agitado (de Stephanopoulus)

Aplicando os princípios genéricos indicados acima

Massa total no tanque Mt:

$$Mt = \rho V = \rho A h \qquad (2.8.7)$$

sendo ρ a densidade do líquido, A a secção do tanque, h o nível do líquido.

Energia total do líquido no tanque Et:

$$Et = U + K + P \qquad (2.8.8)$$

Não há variação da energia potencial nem da cinética porque o tanque não se move.
Por isso a variação da energia será apenas a variação da energia interna U.
Para líquidos, sendo H a sua entalpia,

$$\frac{dU}{dt} \simeq \frac{dH}{dt} \qquad (2.8.9)$$

$$H = \rho V c_p (T - T_{ref}) \qquad (2.8.10)$$

sendo

$c_p \triangleq$ capacidade térmica do líquido no tanque

$T_{ref} \triangleq$ temparatura de referência à qual se assume que a entalpia do líquido é nula.

Aplique-se agora o princípio da conservação da massa e da energia.

Conservação da massa:

$$\frac{d\begin{bmatrix}\text{acumulação da}\\ \text{massa total}\end{bmatrix}}{dt} = \begin{bmatrix}\text{massa total}\\ \text{entrada}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{massa total}\\ \text{saída}\end{bmatrix} \qquad (2.8.11)$$

ou seja

$$\frac{d(\rho A h)}{dt} = \rho F_i - \rho F \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho A dh}{dt} = \rho F_i - \rho F \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = F_i - F \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{F_i}{A} - \frac{F}{A} \qquad (2.8.12)$$

Conservação da energia

$$\frac{d\begin{bmatrix}\text{acumulação de}\\ \text{energia total}\end{bmatrix}}{dt}=\begin{bmatrix}\text{total de energia}\\ \text{entrada}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{total de energia}\\ \text{saída}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{energia fornecida}\\ \text{pelo vapor}\end{bmatrix} \qquad (2.8.13)$$

ou seja

$$\frac{d[\rho Ahc_p(T-T_{ref})]}{dt}=\rho F_i c_p(T_i-T_{ref})-\rho Fc_p(T-T_{ref})+Q$$

$$\Rightarrow \frac{\rho Ac_p d[h(T-T_{ref})]}{dt}=\rho F_i c_p(T_i-T_{ref})-\rho Fc_p(T-T_{ref})+Q$$

$$\Rightarrow \frac{Ad[h(T-T_{ref})]}{dt}=F_i(T_i-T_{ref})-F(T-T_{ref})+\frac{Q}{\rho c_p}$$

$$\Rightarrow \frac{Ad[hT]}{dt}=F_iT_i-FT+\frac{Q}{\rho c_p},\ \text{assumindo } T_{ref}=0 \qquad (2.8.14)$$

$$\frac{Ad[hT]}{dt}=Ah\frac{dT}{dt}+AT\frac{dh}{dt}=Ah\frac{dT}{dt}+T(F_i-F)$$

$$\Rightarrow Ah\frac{dT}{dt}+T(F_i-F)=F_iT_i-FT+\frac{Q}{\rho c_p}$$

$$\Rightarrow Ah\frac{dT}{dt}=F_i(T_i-T)+\frac{Q}{\rho c_p}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt}=\frac{1}{Ah}F_i(T_i-T)+\frac{1}{Ah}\frac{Q}{\rho c_p} \qquad (2.8.15)$$

Juntando as duas equações

$$\frac{dh}{dt}=\frac{F_i}{A}-\frac{F}{A} \qquad (2.8.16)$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{Ah}F_i(T_i-T)+\frac{1}{Ah}\frac{Q}{\rho c_p} \qquad (2.8.17)$$

obtém-se um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem não lineares acopladas.

Note-se que este sistema químico é a conjugação de um fluídico com um térmico.

2.9. Sistemas biológicos

Os sistemas biológicos descrevem o funcionamento dos seres vivos. Vejamos o exemplo da modelização da evolução da população de espécies.

2.9.1. Crescimento de uma população de uma espécie biológica

Suponhamos uma espécie biológica cujos indivíduos nascem e morrem na mesma estação (isto é, vivem um número inteiro de anos).

Inicialmente existem N_0 indivíduos. Ao fim de um ano, N_1 indivíduos, etc., ao fim de k anos N_k indivíduos.

Em princípio poderemos admitir que

$$N_1 = AN_0 \tag{2.9.1}$$

em que A é uma constante positiva que depende das condições ambientais (existência de alimentos, água, clima, etc.). Se $A > 1$, a população aumenta; se $A < 1$, diminui até à extinção. Se $A > 1$ é constante ao longo dos anos, a população crescerá ilimitadamente, levando à explosão populacional Malthusiana.

Ora se a população crescer sem limite, por um lado não haverá alimentos suficientes, e por outro lado os predadores terão mais facilidade em caçar indivíduos da espécie em análise, e por isso o crescimento da população será limitado. Este efeito de limitação pode ser introduzido na equação através de um termo subtrativo que seja insignificante para pequenos valores de N (pequenas populações) e muito influente para grandes valores de N, por exemplo

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2 \tag{2.9.2}$$

Se $B << A$, o termo subtrativo só será relevante para grandes valores de N.

Nos anos seguintes teremos

$$N_2 = AN_1 - BN_1^2 \tag{2.9.3}$$

$$N_3 = AN_2 - BN_2^2 \tag{2.9.4}$$

Haverá uma altura m em que a população não poderá crescer mais, isto é, em que atinge o seu valor máximo, N_{max}. No instante seguinte

$$N_{m+1} = AN_{max} - BN_{max}^2 \tag{2.9.5}$$

para que N_{m+1} seja positivo,

$$\begin{aligned} &AN_{\max} - BN_{\max} \geq 0 \Rightarrow N_{\max}(A - BN_{\max}) \geq 0 \Rightarrow A - BN_{\max} \geq 0 \\ &\Rightarrow A \geq BN_{\max} \Rightarrow N_{\max} \leq \frac{A}{B} \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

Encontrámos assim o limite superior da população, A/B.

Exprimindo a população como uma fração da população máxima, por x_k,

$$x_k = \frac{N_k}{N_{\max}} \tag{2.9.7}$$

teremos, da equação anterior, substituindo,

$$\begin{aligned} &N_{k+1} = AN_k - BN_k^2 \Rightarrow x_{k+1}N_{\max} = Ax_kN_{\max} - Bx_k^2N_{\max}^2 \Rightarrow x_{k+1} = Ax_k - Bx_k^2N_{\max} \\ &\Rightarrow x_{k+1} = Ax_k - Bx_k^2\frac{A}{B} \Rightarrow x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) \end{aligned} \tag{2.9.8}$$

Temos assim encontrado o modelo de crescimento populacional, na forma de uma equação de diferenças não linear,

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = f(x_k), \quad x \in [0,1] \tag{2.9.9}$$

em que x_k é a população no ano k, como uma fração da população máxima.

Haverá estados de equilíbrio, em que a população se mantém constante ao longo do tempo? Nestas circunstâncias teríamos

$$x_{k+1} = x_k$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = x_k \Rightarrow Ax_k - Ax_k^2 = x_k \Rightarrow (A - 1 - Ax_k)x_k = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} A - 1 - Ax_k = 0 \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = \dfrac{A-1}{A} \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = 1 - \dfrac{1}{A} \\ x_k = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9.10}$$

Se $A>1$, temos assim dois estados de equilíbrio. Se $A<1$, só a origem pode ser estado de equilíbrio, dado que x_k tem que ser maior do que zero. Note-se que $A>0$.

2.9.2. Modelo Lotka-Volterra de predador-presa

Este modelo descreve a interação biológica entre duas espécies, na relação particular em que uma (https://services.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/predprey/pred2.html, 22 /07/2022) , a predadora, come a outra, a presa. Há muitos exemplos na natureza: leão-gazela, pássaro-inseto, pandas-eucaliptos, etc.. Para não complicar o modelo façam-se as seguintes hipóteses:

- a espécie predadora é totalmente dependente da presa (é o seu único alimento),

- a presa tem uma quantidade ilimitada de alimentos,

- a presa só tem um predador, o que está a ser considerado e não tem outras limitações.

Na natureza as coisas são mais complicadas, mas assim poderemos desenvolver um modelo aceitavelmente complexo.

Se existirem zero predadores, a presa não tem qualquer limite ao seu crescimento e por isso cresce exponencialmente. Sendo x(t) a população atual no instante t, a sua taxa de crescimento será

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \qquad (2.9.11)$$

Mas havendo predadores, o crescimento será menor: os predadores introduzem um fator negativo nesta equação.

Se y(t) for a população de predadores no instante t, cada um deles tem certa probabilidade de encontrar uma presa. Essa probabilidade é tanto maior quanto mais predadores existirem e tanto maior quanto mais presas existirem. Por isso se pressupõe que

- a taxa de encontros entre um predador e uma presa é conjuntamente proporcional ao tamanho das duas populações.

- dos encontros realizados, uma parte fixa resulta na morte da presa.

Assim teremos a equação (2.9.12) para as presas

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \ . \tag{2.9.12}$$

Quanto à população de predadores, *y*, se não tiver alimentos morre a uma velocidade proporcional ao seu tamanho, ou seja, neste caso,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) \tag{2.9.13}$$

por não haver energia para novos nascimentos.

Ora felizmente para os predadores existem presas, e por isso eles vão aí buscar energia para se reproduzirem. Por cada encontro predador - presa há uma parte que resulta em alimentos para o predador e por isso a sua população variará de acordo com (2.9.14)

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t) \tag{2.9.14}$$

sendo p uma constante.

Juntando as equações obtidas obtém-se o modelo de Lotka-Volterra

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \tag{2.9.15}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t) \tag{2.9.16}$$

composto por duas equações diferenciais de 1ª ordem acopladas, que não podem ser resolvidas separadamente e para as quais não é possível encontrar uma solução analítica (mas apenas computacional).

Pode-se mostrar que existe um par (x_S, y_s) para o qual dx/dt=dy/dt=0, isto é, as populações estão em equilíbrio e não variam ao longo do tempo. Para isso basta fazer

$$0 = ax(t) - bx(t)y(t)$$
$$0 = -cy(t) + px(t)y(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)]x(t) = 0 \wedge x(t) \neq 0 \\ [-c + px(t)]y(t) = 0 \wedge y(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)] = 0 \\ [-c + px(t)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \dfrac{a}{b} \\ x(t) = \dfrac{c}{p} \end{cases} \qquad (2.9.17)$$

um tal estado chama-se regime permanente ou estado estacionário. O seu valor depende das constantes a ,b ,c ,e p , os parâmetros do modelo.

Voltaremos a este modelo mais tarde (trajetórias de fase, estados de equilíbrio, …).

Existem modelos mais completos de duas populações. Por exemplo em

https://www.montana.edu/screel/teaching/bioe-370/documents/L-V competition populus.pdf

encontra-se um modelo que inclui competição (luta pelos mesmos recursos) entre espécies, interação agressiva (combatem-se ativamente, embora não se comam), cooperação ou simbiose (ajudam-se mutuamente), relação predador-presa, interação forte-fraco (uma espécie está mais capacitada para sobreviver).

2.10 Sistemas fisiológicos

Os sistemas fisiológicos incluem os organismos dos animais em geral e do homem em particular. São dos sistemas mais complexos que a natureza criou. Eles compõem-se em grande medida de sistemas dos tipos que vimos (mecânicos, fluídicos, químicos, etc.) que ao incluírem órgãos vivos adquirem, por sinergia, novas propriedades.

Exemplo 2.10.1. Um vaso sanguíneo

Considere-se um vaso sanguíneo ilustrado na figura.

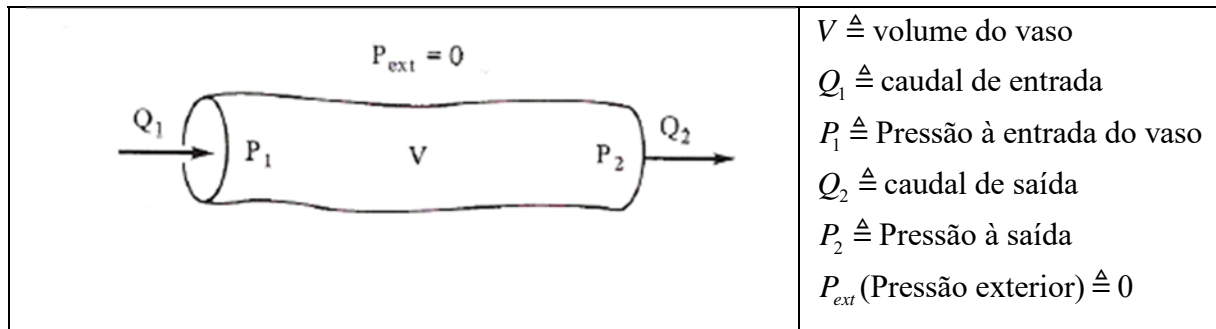



Figura 2.10.1 . Representação de um vaso sanguíneo (de Hoppensteadt , p. 9)

Para encontrarmos uma relação entre *Q*, P_1, P_2 e *V* consideram-se duas propriedades do vaso: a sua resistência ao fluxo e a sua complacência (*compliance*) para com a pressão (que tende a aumentar a sua secção). A fim de facilitar a análise idealizem-se duas situações.

(i) Um vaso sem complacência, rígido, de volume constante e bem conhecido:

Admita-se que o vaso está a funcionar em regime permanente em que todas aquelas quantidades são constantes. Nessas condições, necessariamente $Q_1=Q_2$, porque não há acumulação de sangue no vaso por ser constante o seu volume. Seja $Q= Q_1=Q_2$ esse valor do fluxo. Para ele teremos, como nos sistemas fluídicos, o caudal Q dado na Fig. 2.10.2.

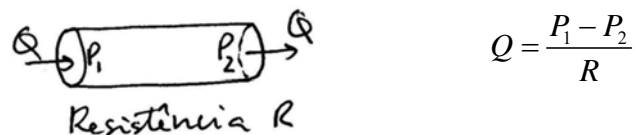



Figura 2.10.2. Um vaso rígido, puramente resistivo

A *R* chama-se resistência do vaso e teremos aqui um vaso de resistência.

(ii) Um vaso elástico sem qualquer resistência fluídica:

Nestas condições a pressão na entrada é igual à pressão na saída, para qualquer valor de Q. A relação entre a pressão P e o volume V do vaso pode ser aproximada pela relação da Fig 2.10.3,

$$V = CP \quad \Rightarrow \quad C = \frac{V}{P}$$

$$Q_1 \neq Q_2$$

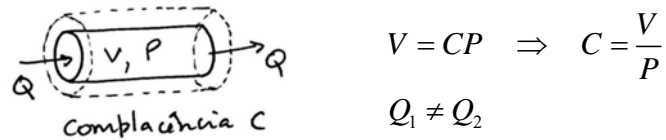



Figura 2.10.3. Um vaso puramente elástico, sem resistência

em que a constante *C* se chama a complacência do vaso. Estamos a admitir que o vaso tem um volume V_d nulo quando a pressão é nula (volume "morto", *dead*). Se assim não for teremos $V = V_d + CP$.

Estas situações i) e ii) idealizadas exprimem a realidade com alguma aproximação. Um vaso real tem resistência e complacência ao mesmo tempo. A relação entre as variáveis não é exatamente linear, mas a linearidade é uma hipótese simplificadora.

Consideremos agora o vaso simultaneamente com resistência e complacência, num regime não estacionário em que o caudal de entrada Q_1 é diferente do caudal de saída Q_2, como na Fig. 2.10.1. Nestas condições ou há enchimento (o vaso aumenta de volume, se $Q_1 > Q_2$) ou esvaziamento (o vaso diminui de volume, $Q_1 < Q_2$). Durante um pequeno intervalo de tempo, Δt, a variação de volume será (2.10.1), pela lei de conservação da massa,

$$\Delta V = Q_1 \Delta t - Q_2 \Delta t \tag{2.10.1}$$

ou seja (2.10.2)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Q_1 - Q_2 \ . \tag{2.10.2}$$

Ou ainda, aplicando limites, (2.10.3)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \dot{V}(t) = Q_1(t) - Q_2\,(t) \ . \qquad (2.10.\ 3)$$

Pela definição de complacência C, como relação entre o volume e a pressão, tem-se (2.10.4).

$$V(t) = CP(t) \tag{2.10.4}$$

A pressão de referência P_0 é a do exterior do vaso, e P(t) , a pressão a que a complacência está sujeita, é medida em relação a P_0 . Mas levanta-se agora a questão: em que ponto devemos considerar a pressão P(t) ? Podemos considerá-la à entrada, como P_1(t), ou à saída, como P_2(t) (note-se que estas duas pressões são diferentes), ou num ponto intermédio qualquer, por

exemplo a média das duas ? Esta questão será discutida mais à frente. Por agora aceitemos a escolha de P_2(t).
Assim teremos (2.10.5)

$$V(t) = CP_2(t) \ . \tag{2.10.5}$$

E agora derivando ambos os lados da igualdade ,

$$\dot{V}(t) = C\dot{P}_2(t) \tag{2.10.6}$$

ou seja (2.10.7)

$$\dot{P}_2(t) = \frac{V(\dot{t})}{C} \quad . \tag{2.10.7}$$

Substituindo agora (2.10.3) em (2.10.7) obtém-se (2.10.8)

$$\dot{P}_2(t) = \frac{Q_{1(t)}}{C} - \frac{Q_{2(t)}}{C} \quad . \tag{2.10.8}$$

O vaso tem uma resistência fluídica R. A relação entre a pressão e o caudal é, à entrada (2.10.9)

$$Q_1(t) = \frac{P_1(t) - P_0}{R} \tag{2.10.9}$$

e à saída (2.10.10)

$$Q_2(t) = \frac{P_2(t) - P_0}{R} \tag{2.10.10}$$

Substituindo (2.10.9) e (2.10.10) em (2.10.7) obtém-se finalmente (2.10.11)

$$\dot{P}_2(t) = \frac{P_1(t) - P_0}{RC} - \frac{P_2(t) - P_0}{RC} = -\frac{P_{2(t)}}{RC} + \frac{P_{1(t)}}{RC} \quad . \tag{2.10.11}$$

Vejamos agora a analogia entre o enchimento do vaso e a carga de um condensador. A complacência controla o aumento do volume do vaso e a capacidade controla o aumento da carga elétrica do condensador. Conforme a complacência C, o vaso alarga-se até chegar a um volume fixo, V, que depende da complacência, sendo V=CP, em que P é a diferença de pressão entre os dois lados da parede do vaso. Conforme a capacidade C, o condensador carrega-se até chegar a uma carga fixa, Q, que depende da capacidade C. Aí Q=CV.

Por isso um vaso sem resistência e com complacência pode ser analogamente representado por um condensar, como na figura

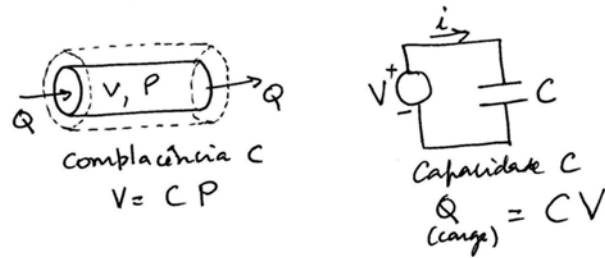



Figura 2.10.4. Analogia entre a complacência e a capacidade

A resistência do vaso à circulação do sangue é a resistência fluídica que vimos nos sistemas fluídicos. Se o vaso for rígido (Fig. 2.10.5) não tem complacência e o caudal de entrada é igual ao caudal de saída. Há uma diferença de pressão entre a entrada e a saída e o caudal depende dessa diferença. Como sabemos a resistência fluídica é análoga da resistência elétrica, tal como na Fig. 2.10.5.

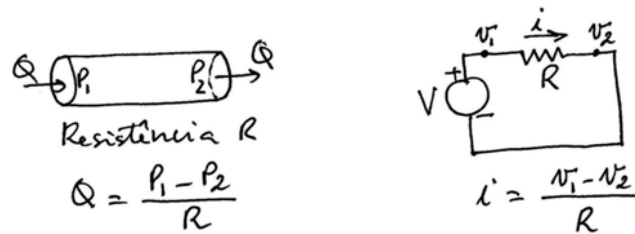



Figura 2.10.5. Analogia entre a resistência fluídica do vaso rígido e a resistência elétrica.

Juntando as duas situações obteremos a seguinte tabela de analogias, que se extrai da comparação das equações dos dois sistemas.

Vaso		Circuito elétrico	
Pressão,	P	V,	Tensão
Volume,	V	Q,	Carga,
Caudal,	Q	i ,	Corrente,
Resistência,	R	R,	Resistência
Complacência,	C	C,	Condensador C

Tabela 2.10.1. Analogias fisiológico-elétrico.

Vejamos agora como poderemos obter um circuito elétrico análogo a um vaso que tenha simultaneamente complacência e resistência. Em primeiro lugar deveremos constatar que estas propriedades se distribuem uniformemente ao longo do vaso, desde a entrada até à saída. Poderemos dividir o vaso em secções pequenas, tal como na Fig.2.10.6, e para cada uma delas considerar a sua complacência e a sua resistência. Teremos para cada uma delas uma resistência e uma capacidade como análogos elétricos.

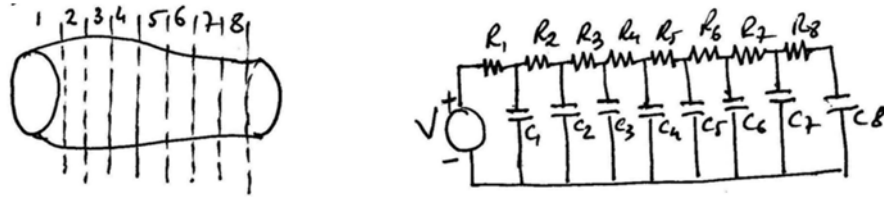



Figura 2.10.6. Analogia entre um vaso e um circuito elétrico. Cada secção é análoga a um circuito R-C.

Trata-se de um sistema de parâmetros distribuídos, e não de parâmetros concentrados. De facto, na natureza, as propriedades dos elementos distribuem-se normalmente pela extensão dos elementos. Em engenharia, por necessidade prática, simplifica-se a análise para a tornar tratável e supõe-se que elas estão concentradas num ponto. Só assim poderemos desenhar, por exemplo, um circuito com R-L-C no caso dos elétricos. Trabalhar com parâmetros distribuídos torna-se praticamente impossível. Fazendo essa aproximação ao circuito aos sistemas da Figura 2.10.6, obteremos finalmente a Fig. 2.10.7 para um circuito elétrico R-C análogo a um vaso sanguíneo.

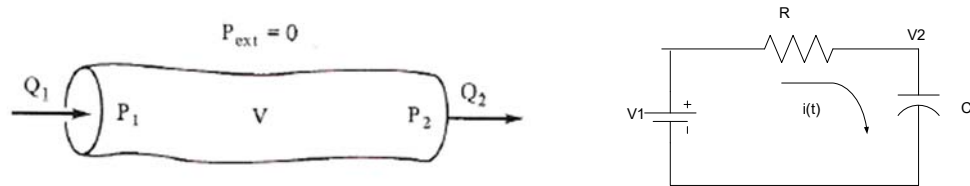



Figura 2.10.7. Analogia entre um vaso e um circuito elétrico no contexto de parâmetros concentrados.

Esta analogia torna-se evidente se escrevermos as equações diferenciais para a variação da pressão P_2 na saída do vaso e da tensão v_2 aos terminais do condensador.

P_1 variável:	v_1 variável :
$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{P_2}{RC} + \frac{P_1}{RC}$ (2.10.11)	$C\frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R} \Rightarrow \frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2}{RC} + \frac{v_1}{RC}$ (2.10.12)

Para o vaso temos a equação (2.10.11), que obtivemos anteriormente, e para o análogo elétrico a (2.10.12). Fica assim justificada a escolha da pressão à saída do vaso no desenvolvimento de (2.10.11).

No corpo humano a circulação produz uma divisão entre os vasos de resistência e os vasos de complacência. As grandes artérias e veias são sobretudo de complacência, porque bastam pequenas diferenças de pressão para produzir o fluxo de sangue, e o seu volume sofre variações muito significativas. As pequenas artérias e veias nos tecidos (arteríolas e vénulas) são sobretudo vasos de resistência: o seu volume varia pouco e verificam-se aí grandes diferenças de pressão.

Exemplo 2.10.2. Músculo suspenso por uma extremidade

Imagine-se um músculo de rã fixo por uma extremidade e no qual se suspende uma corpo de massa *M* (de Bruce). O músculo, devido à sua elasticidade, alonga-se. Pode-se desenhar um equivalente mecânico de translação com uma mola *K* (elasticidade), atrito viscoso *R*, massa *M*.

A força aplicada à massa é a da gravidade e igual ao seu peso: F=*Mg*.

(Fig. 2.10 Bruce)

Figura 2.10.8 (de Bruce)

O atrito e a mola reagem com as forças

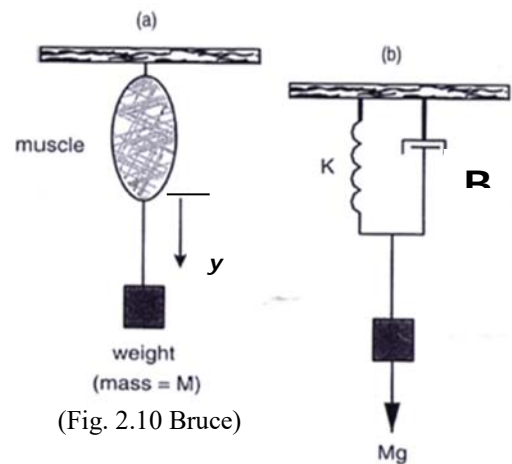
$$\text{atrito: } F_B = B\frac{dy}{dt} = B\dot{y} \qquad (2.10.13)$$

$$\text{mola: } F_K = Ky \qquad (2.10.14)$$

A força resultante é a soma das três e produz o deslocamento y

$$Mg - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = Mg \qquad (2.10.15)$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = g \qquad (2.10.16)$$

Obtendo-se assim uma equação diferencial de segunda ordem linear

Exemplo 2.10.3 Modelo biomecânico da inspiração/expiração pulmonar

O ato de inspirar e expirar pode ser descrito por um sistema biomecânico ilustrado pela figura seguinte.

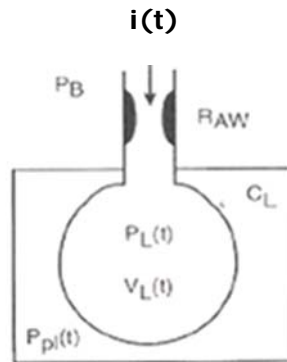



Figura 2.10.9. A biomecânica da inspiração (Bruce, p. 31).

No estado de relaxamento, sem qualquer fluxo de ar, a pressão dentro dos pulmões é igual à pressão atmosférica, P_B. Durante a inspiração os músculos respiratórios – isto é, o diafragma e os músculos da caixa torácica contraem-se e baixam a pressão ($P_{pl}(t)$, pressão pleural) em torno dos pulmões dentro do peito.

Devido à sua elasticidade (descrita pela complacência C, o inverso da elasticidade), os pulmões expandem-se devido ao abaixamento da pressão transmural dentro deles e por isso a pressão interior dos pulmões (representada por $P_L(t)$) decresce momentaneamente. Gera-se assim uma queda de pressão na resistência fluídica R_{AW} das vias respiratórias, donde resulta um caudal de ar para dentro dos pulmões. Enquanto os músculos se contraírem, com força crescente, este processo repete-se e a inspiração continua. No fim da inspiração os músculos expiratórios do abdómen e da caixa torácica. contraem-se, forçando $P_{pl}(t)$ a ultrapassar P_B (pressão atmosférica) e expulsando o ar dos pulmões. Na respiração de descanso os músculos de expiração não se contraem, basta a relaxação dos músculos de inspiração para que $P_{pl}(t)$ ultrapasse P_B.

Este processo biomecânico pode ser descrito matematicamente a partir das propriedades físicas das estruturas envolvidas. Trata-se de um sistema misto fluídico-mecânico.

O fluxo de ar depende da diferença de pressão através da resistência fluídica R_{AW} e da própria resistência.

Se I(t) representa o caudal de ar de inspiração/expiração, teremos,

$$I(t) = \frac{P_B - P_L(t)}{R_{AW}} \quad \text{ou seja} \quad P_B - P_L(t) = I(t) R_{AW} \tag{2.10.17}$$

Sendo V(t) o volume dos pulmões, durante o intervalo de tempo Δt a variação do volume será, admitindo I(t) constante durante Δt,

$$V_L(t+\ t)\ -\ V_L(t) = I(t)\ \Delta\ t \Rightarrow \frac{V_L(t+\ t)\ -\ V_L(t)}{\Delta\ t} = I(t)$$
$$\Rightarrow I(t) = \dot{V}_L(t) \tag{2.10.18}$$

e por isso, substituindo em (2.10.17),

$$P_B - P_L(t) = \dot{V}_L(t)\, R_{AW} \quad . \tag{2.10.19}$$

A complacência dos pulmões C_L é definida pela relação entre o volume dos pulmões e a pressão transmural

$$C_L = \frac{V_L(t)}{P_L - P_{pl}(t)} \tag{2.10.20}$$

donde

$$P_L - P_{pl}(t) = \frac{V_L(t)}{C_L} \quad \Rightarrow \quad P_L = P_{pl}(t) + \frac{V_L(t)}{C_L} \tag{2.10.21}$$

Substituindo agora P_L na expressão acima,

$$P_B - P_L(t) = \dot{V}(t)\, R_{AW} \quad \Rightarrow P_B - P_{pl}(t) + \frac{V_L(t)}{C_L} = \dot{V}(t)\, R_{AW}$$
$$\Rightarrow\ P_B - P_{pl}(t) = \dot{V}(t)\, R_{AW} + \frac{V_L(t)}{C_L} \tag{2.10.22}$$

Como a pressão atmosférica é constante, define-se a pressão diferencial

$$P(t) = P_B - P_{pl}(t) \tag{2.10.23}$$

e

$$P(t)=\overset{\bullet}{V_L}(t)\,R_{AW}+\frac{V_L(t)}{C_L}\quad\Rightarrow$$

$$\overset{\bullet}{V_L}(t)+\frac{1}{R_{AW}C_L}V_L(t)=-\frac{1}{R_{AW}}P(t) \tag{2.10.24}$$

ou

$$\overset{\bullet}{V_L}(t)+aV_L(t)=bP(t)$$

obtendo-se uma equação diferencial de 1ª ordem, linear, que relaciona o volume dos pulmões V_L com a pressão relativa intramural *P(t)*. Do ponto de vista sistémico pode representar-se pelo diagrama de blocos

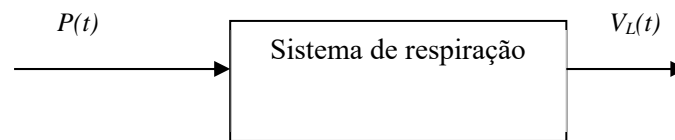



Figura 2.10.10

Note-se que

$$\overset{\bullet}{V}(t)=I(t)\quad\Rightarrow\quad V(t)=V(0)+\int_o^t I(t)dt \tag{2.10.25}$$

em que $V_L(0)$ é o volume em repouso. Como é constante (característica do indivíduo), pode considerar-se nula e $V_L(t)$ representa por isso a variação do volume dos pulmões em relação a $V_L(0)$.

2.11 Outros tipos de sistemas

Podem-se desenvolver modelos para sistemas financeiros, de gestão, sociais, etc.

Exemplo 2.10.1. Empréstimo bancário

Considerando

$y_0 \triangleq$ valor do empréstimo total

$u_k \triangleq$ prestação entregue no mês k

$r \triangleq$ taxa de juro, $100r\%$, mensal

$y_k \triangleq$ montante em dívida no mês k

o que se fica a dever para o mês seguinte é igual ao que se deve no mês corrente mais os juros sobre os que se deve no mês corrente, menos a prestação u_k que se faz no mês corrente. Ou seja, é uma equação de balanço financeiro dada por (2.11.1).

$$y_{k+1} = y_k + ry_k - u_{k+1} = (1+r)y_k - u_k \tag{2.11.1}$$

2.12. Simulação das equações diferenciais e de diferenças.

As equações diferenciais podem-se simular em circuitos eletrónicos com componentes apropriados.

No caso de equações lineares de coeficientes constantes bastam blocos que executem as operações de adição, multiplicação por uma constante e integração.

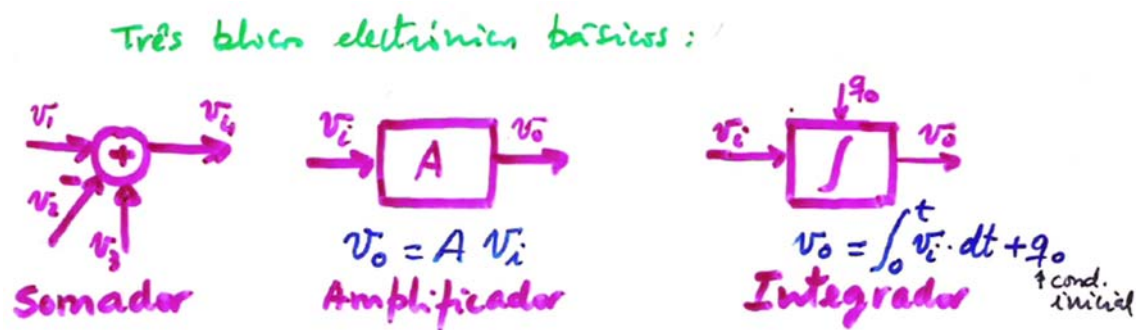



Figura 2.12.2 Os três elementos de simulação de sistemas dinâmicos lineares invariantes.

Com eles poderemos simular qualquer equação diferencial linear invariante.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Uma equação diferencial de 1ª ordem

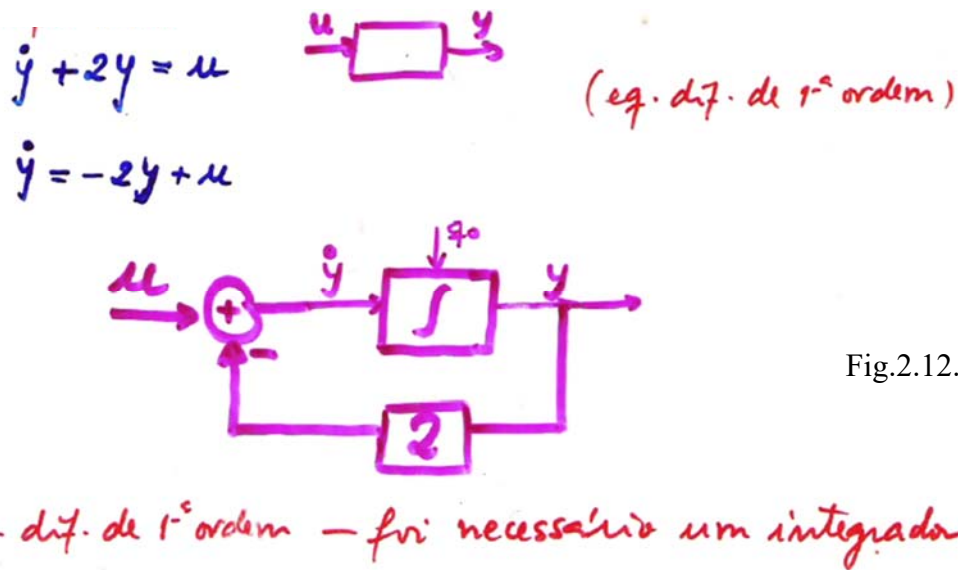



Fig.2.12.3

Estes modelos de simulação são implementáveis fisicamente , com o chamado computador analógico .

Permitem analisar o comportamento de sistemas físicos através da observação das variáveis do circuito analógico análogo às do sistema físico.

Permitem ainda encontrar outra representação do sistema (equações de estado a ver no Cp. 4).

Exemplo 2. Simulação do posicionamento de um satélite

Em 2.4.14 vimos o modelo de um satélite como um sistema de rotação, que aqui se repete.

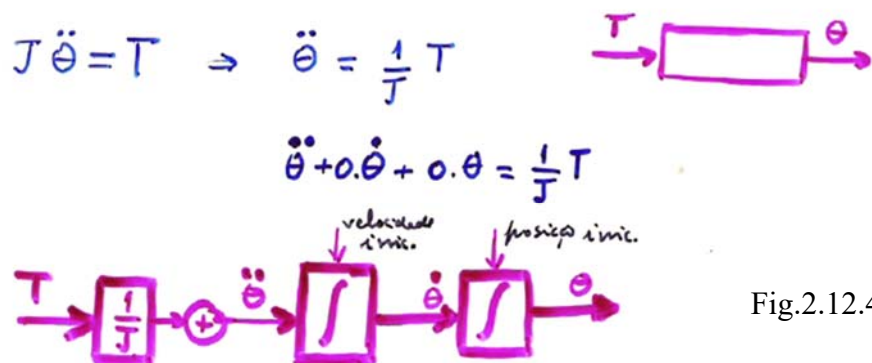



Fig.2.12.4

Exemplo 3. Sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem

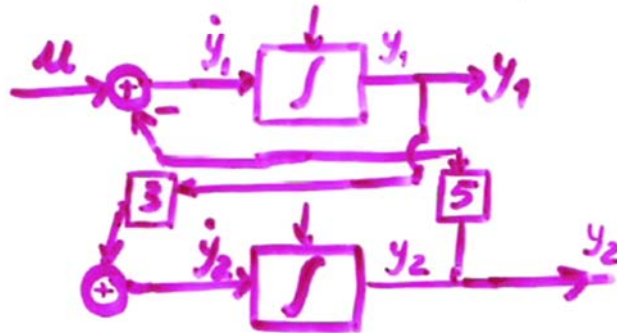



Fig.2.12.5

Exemplo 4. Equação diferencial de 2ª ordem

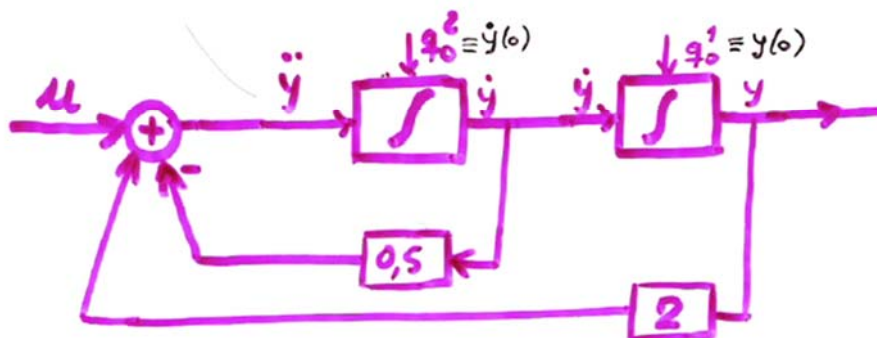



Fig.2.12.6

Exemplo 5. Equação diferencial de 3ª ordem

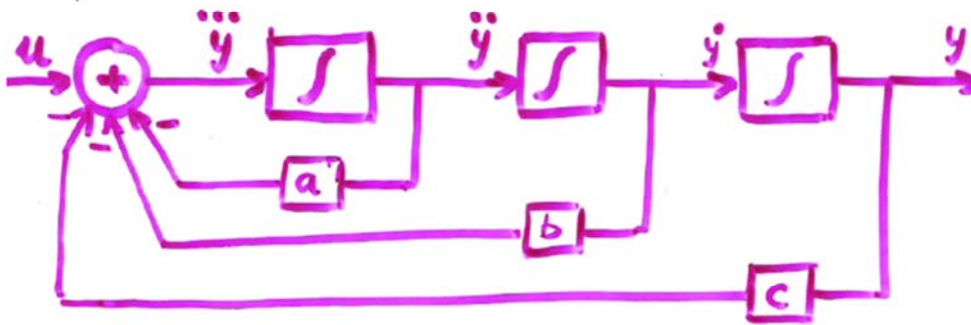



Fig.2.12.7

Exemplo 6. Sistema de duas equações diferenciais de 2ª ordem:

$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 3\dot{y}_2 + 0{,}5\,y_1 + 0{,}7\,y_2 = u_1$$

$$\ddot{y}_2 + 0{,}1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - 5\,y_1 + 15\,y_2 = 2\,u_2$$

$$\ddot{y}_1 = -2\dot{y}_1 + 3\dot{y}_2 - 0{,}5\,y_1 - 0{,}7\,y_2 + u_1$$

$$\ddot{y}_2 = -0{,}1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 + 5\,y_1 - 15\,y_2 + 2\,u_2$$

podendo-se desenhar o diagrama de blocos:

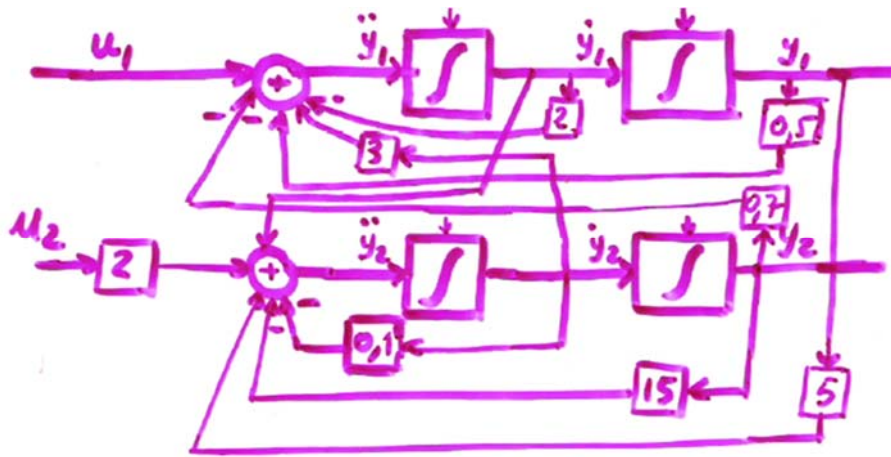



Fig.2.12.8

2.13 Sistemas contínuos com atraso puro ou atraso de transporte

Em muitas situações transporta-se energia ou massa entre dois pontos sem quqlqer transformação de permeio

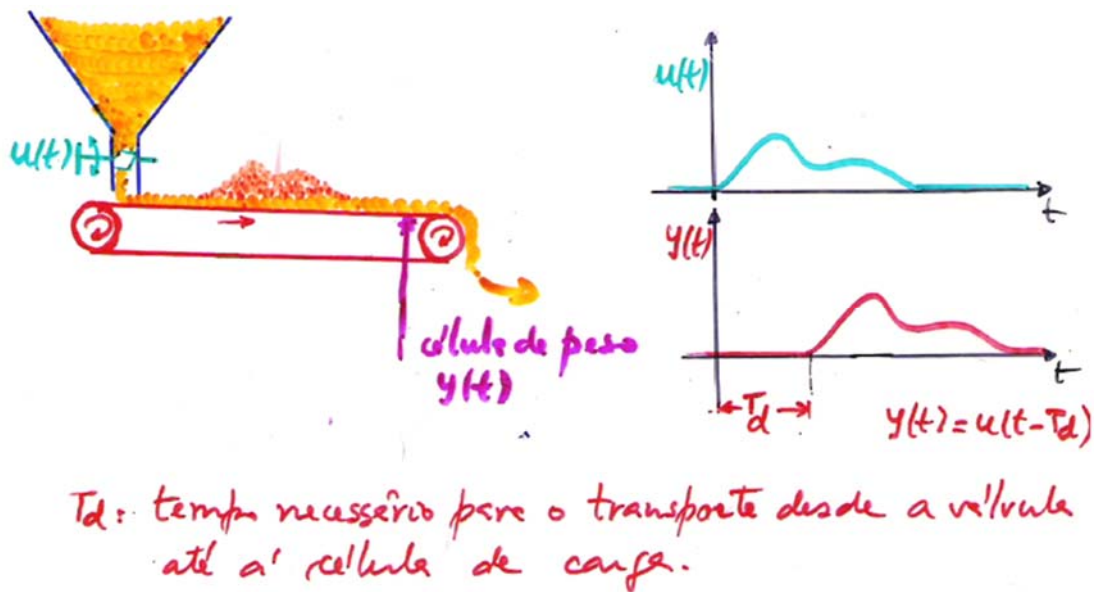
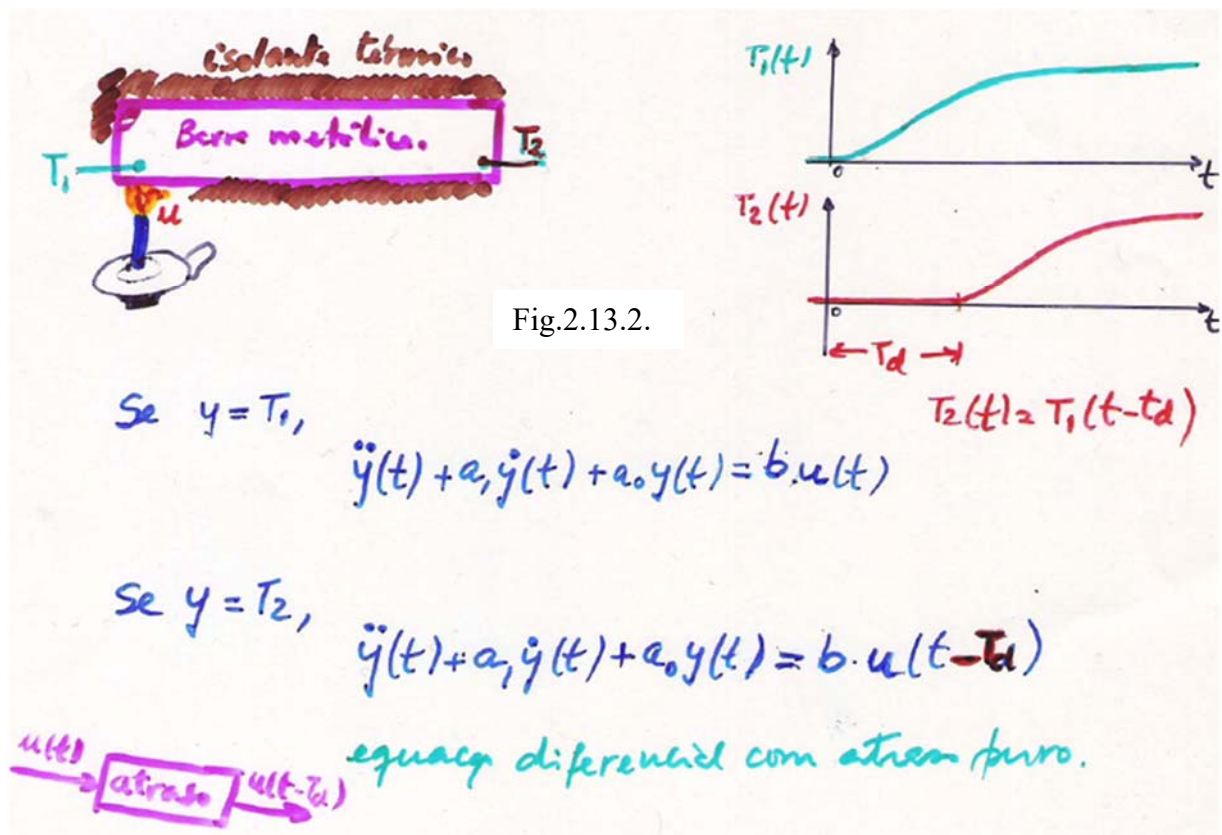



Fig.2.13.1. Atraso puro ou atraso de transporte

Uma tremonha de cereais apresenta um atraso de transporte entre a entrada e a saída dependente do comprimento e da velocidade do tapete rolante.

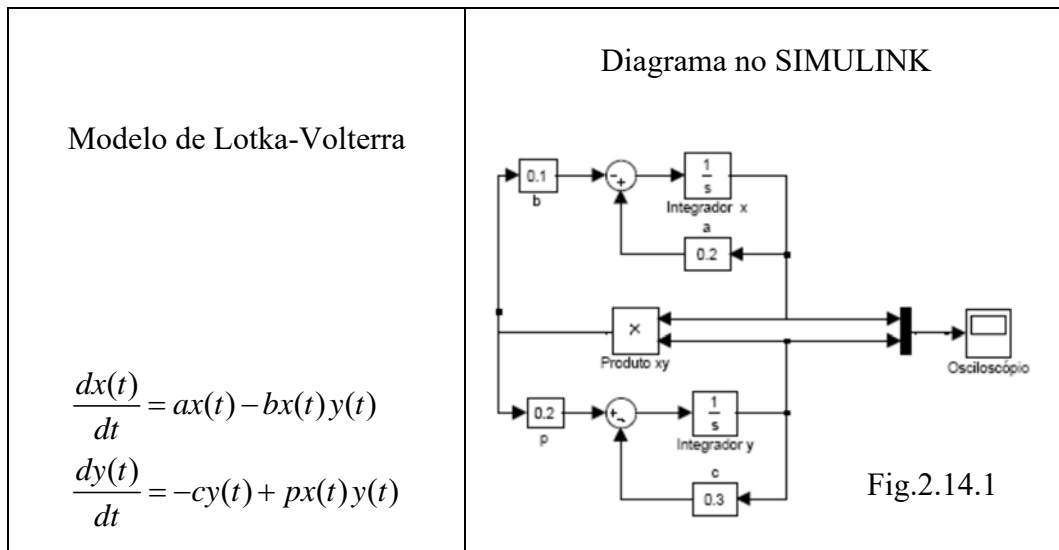
Se aquecermos uma barra metálica numa das extremidades, o calor demora algum tempo a chegar à extremidade oposta. Admitindo que a barra está termicamente isolada (não se perde

energia térmica), a temperatura em T_2 seguirá a mesma evolução da de T_1, mas com um atraso puro,

Fig.2.13.2.

O atraso puro (diz-se assim porque o sistema só aplica atraso à entrada, abstendo-se de qualquer outra ação) existe em muitos processos e normalmente é um problema. Aparece geralmente combinado com outros efeitos.

2.14 Sistemas não lineares

Para sistemas não lineares, em que por exemplo as variáveis se multiplicam umas pelas outras (como no modelo de Lotka-Volterra), são necessários blocos adicionais que executem essas operações.

O SIMULINK (Matlab) simula blocos eletrónicos (pode-se dizer que implementa blocos eletrónicos por programação). Contém um grande conjunto de blocos que permite implementar facilmente qualquer operação matemática e portanto simular qualquer sistema (linear ou não linear). Por exemplo para o modelo de Lotka-Volterra tem-se o seguinte diagrama de blocos no SIMULINK, em que as constantes *a, b, c, p,* são implementadas por amplificadores (quadrados na figura). No capítulo 3 veremos porque 1/s é um integrador.

A simulação de sistemas discretos, definidos por equações de diferenças, também de pode fazer no SIMULINK. Agora o bloco integrador é substituído pelo bloco atraso (*unit delay*).

De facto, para a equação de diferenças por exemplo do empréstimo bancário, linear

$$y_{k+1} = y_k + ry_k - u_{k+1} = (1+r)y_k - u_k$$

Poderemos definir o operador atraso z^{-1}, e o de avanço z tal que

$$z^{-1}[y_{k+1}] = y_k \qquad z[y_k] = y_{k+1} \qquad z[z^{-1}[y_{k+1}]] = z[y_k] = y_{k+1}$$

Poderemos representar aquela equação do empréstimo pelo diagrama de blocos seguinte

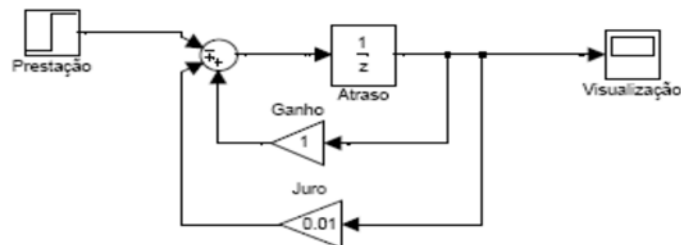
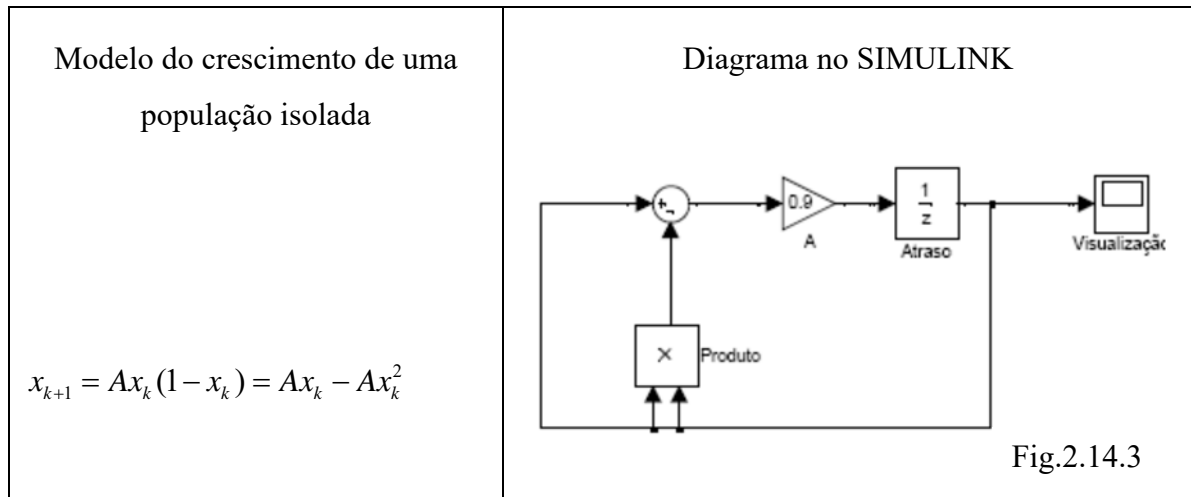



Figura 2.14.2 Diagrama SIMULINK do empréstimo bancário

Para o modelo de crescimento populacional, não linear, teremos que usar o bloco de produto.

Fig.2.14.3

Qualquer equação diferencial se pode reduzir (aproximar) a uma equação de diferenças, aproximando a derivada (pelas diferenças para a frente, por exemplo) ou o integral (pela regra trapezoidal, por exemplo).

2.15. Conclusão

Na generalidade dos sistemas podem-se aplicar os princípios básicos (do respetivo domínio) para se obter um conjunto de equações diferenciais (nos sistemas contínuos) ou de diferenças (nos sistemas discretos), que são uma representação matemática do sistema e constituem por isso um modelo matemático.

Esse modelo servirá, como veremos, para o estudo do comportamento do sistema (a sua evolução temporal, por exemplo) e contém características matemáticas que exprimem propriedades internas essenciais do sistema.

Obtido o modelo, importa saber como se vai usar, e é esse o tema dos próximos capítulos.

Referências

- Baura, G. D., *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals*, , John Wiley and Sons, 2002

- Bruce, Eugene N., *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling,* John Wiley and Sons, 2001.

- Carvalho, M., *Sistemas de Controlo Automático*, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- Chen, T. *Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Saunders College Publ, 1994
- Hoppensteadt, F.C. and Charles S. Peskin,, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences* , Springer Verlag, 2000
- McMahon, Thomas A., *Muscles, Reflexes and LocomotionI,* Princeton University Press, 1984.
- Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares*,., IST Press 2002
- Stephanopoulos, G., *Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice*,. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
- Witten (Ed) M, *Mathematical models in medicine : diseases and epidemics*, Pergamon, 1987.
- *Simulink Users Guide,* The Mathworks.

Capítulo 3

(documento de trabalho)

Função de transferência e dinâmicas dos sistemas

3.1. Introdução

A obtenção das equações diferenciais estudadas nos capítulos anteriores é uma etapa importante no desenvolvimento de modelos computacionais. A partir delas desenvolvem-se modelos matemáticos em dois espaços conceptuais: (i) função de transferência e (ii) espaço de estados.

A função de transferência representa o sistema em análise de uma forma compacta e intuitiva. Há parâmetros dessa representação que estão estreitamente relacionados, de modo conhecido, com propriedades estruturais do sistema, e por isso conhecida a função de transferência, é possível deduzir facilmente essas propriedades. O seu desenvolvimento decorre no domínio complexo, pois trata-se de uma função de variável complexa. Representa facilmente o sistema no domínio da frequência (substituindo s por jw). Tem, no entanto, duas fortes limitações: não é prática para a programação computacional e aplica-se apenas a equações diferenciais lineares e de coeficientes constantes.

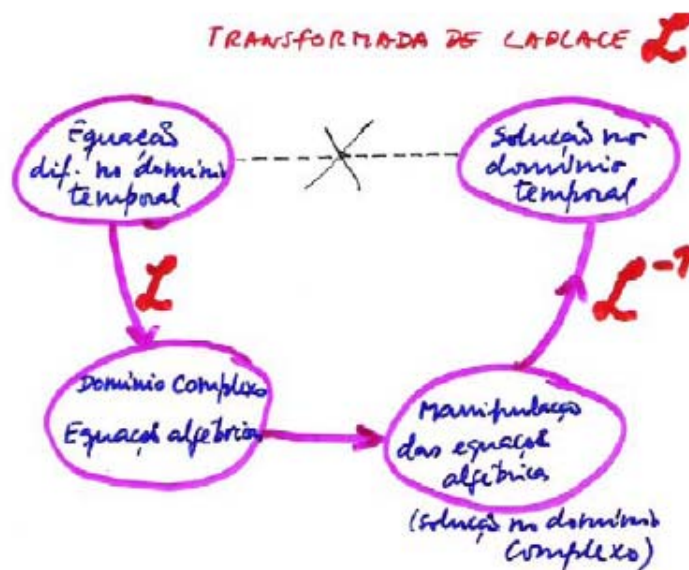



Figura 4.1.1 Ilustração da utilidade da transformada de Laplace

No espaço de estados definem-se as equações de estado, que são nem mais nem menos do que um arranjo em forma padronizada das equações diferenciais. Estudá-lo-emos no Capítulo 4. É de aplicação mais geral, para o caso linear e não linear, variante e invariante.

3.2. Aplicação da transformada de Laplace às equações diferenciais

A transformada de Laplace é uma boa ferramenta para a resolução de equações diferenciais. Por exemplo no Capítulo 2 vimos o sistema mecânico da suspensão de um automóvel, para o qual obtivemos a equação diferencial de 2ª ordem

Imagine-se um músculo de rã fixo por uma extremidade e no qual se suspende uma corpo de massa M (de Bruce), como no Cap. 2, pág. 65. O músculo, devido à sua elasticidade, alonga-se. Pode-se desenhar um equivalente mecânico de translação com uma mola K (elasticidade), atrito viscoso R, massa M. A força aplicada é u=Mg

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+Ky=u$$

Suponhamos, para fins ilustrativos, que M=2, B=3, K=1. Substituindo obtém-se

$$2\ddot{y}+3\dot{y}+1y=u$$

Para um dado u conhecido, por exemplo um degrau unitário, qual será a evolução da posição muscular $y(t)$? A resposta obtém-se resolvendo a equação diferencial.

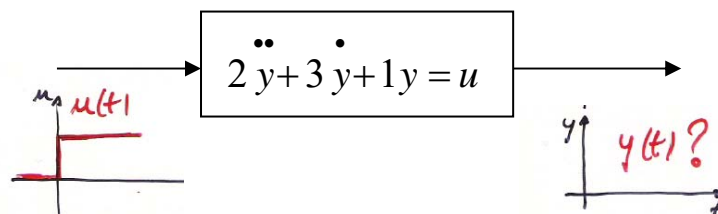



Figura 3.2.1. Para uma entrada em degrau com será a saída ?

Aplicando o a propriedade da derivação no domínio temporal (ver Apêndice), obtém-se sucessivamente

$$2\left[s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = V(s)$$

$$(2s^2+3s+1)\,Y(s) = 2s\,y(0) + 2\dot{y}(0) + 3y(0) + V(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(2s+3)y(0)+2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{1}{2s^2+3s+1}\,U(s)}_{Y_{zs}}$$

dado: $y(0) = -1$
$\dot{y}(0) = 1$

$$= \frac{-(2s+3)+2}{2s^2+3s+1} + \frac{1}{(2s^2+3s+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

Verifica-se que a saída Y(s) tem duas parcelas:

i) a devida às condições iniciais, Y_{zi}, e entrada nula (zi de *zero input*)

ii) a devida è entrada, Y_{zs}, e condições iniciais nulas (zs de *zero (initial) state*)

Considerando as duas em simultâneo, depois de reduzir ao mesmo denominador,

$$Y(s) = \frac{-2s^2-s+1}{s(2s^2+3s+1)} = \frac{-2s^2-s+1}{s(s+1)(s+0{,}5)2}$$

Procurando as raízes do denominador e decompondo-o em fracções parciais, obtém se

$$2s^2+3s+1 = (s^2+1{,}5s+0{,}5)\,2 = (s+1)(s+0{,}5)\,2$$

$$A_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2-2}}{2} = \frac{-1{,}5 \pm 0{,}5}{2} = \begin{cases} -1 \\ -0{,}5 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2-0{,}5s+0{,}5}{s(s+1)(s+0{,}5)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+0{,}5}$$

Calculando agora os resíduos A1, A2 e A3 (pela técnica do Apêndice),

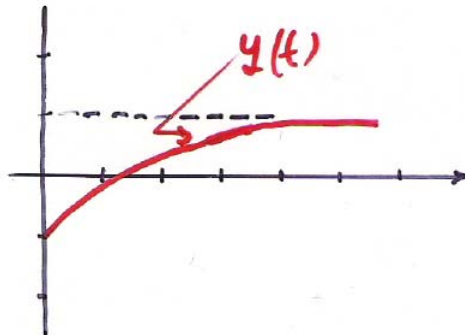
$$A_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{-s^2-0{,}5s+0{,}5}{(0+1)(0+0{,}5)} = 1$$

$$A_2 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{-(-1)^2-0{,}5(-1)+0{,}5}{(-1)(-1+0{,}5)} = \frac{0}{0{,}5} = 0$$

$$A_3 = (s+0{,}5)Y(s)\Big|_{s=-0{,}5} = \frac{-(-0{,}5)^2-0{,}5(-0{,}5)+0{,}5}{(-0{,}5)(-0{,}5+1)} = \frac{0{,}5}{-0{,}25} = -2$$

obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0}{s+1} - 2\,\frac{1}{s+0{,}5}$$

Calculando agora a transformada inversa obtém-se y(t)

Verifica-se que y(0)=-1, como era de esperar.

3.3. Polinómio característico, modos e estabilidade

Se calcularmos a resposta da suspensão do exemplo anterior, quando apenas as condições iniciais são não nulas (não aplicamos qualquer entrada), obtemos,

$$Y_{zi}(s) = \frac{(2s+3)y(0) + 2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1} = \frac{2y(0)s + [3y(0)+2\dot{y}(0)]}{2(s+0{,}5)(s+1)}$$

e invertendo, decompondo previamente em fracções parciais,

$$Y_{zi}(s) = \frac{A_1}{s+0{,}5} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$y_{zi}(t) = A_1 e^{-0{,}5t} + A_2 e^{-t}$$

Calculando A1 e A2,

$$A_1 = \left.\frac{2y(0)s + [3y(0)+2\dot{y}(0)]}{2(s+1)}\right|_{s=-0{,}5} = \frac{-y(0)+3y(0)+2\dot{y}(0)}{1} = 2(y(0)+\dot{y}(0))$$

$$A_2 = \left.\frac{2y(0)s + [3y(0) + 2\dot{y}(0)]}{2(s+0{,}5)}\right|_{s=-1} = \frac{-2y(0)+3y(0)+2\dot{y}(0)}{-1} = -y(0)-2\dot{y}(0)$$

podemos constatar os seguintes factos:

$y_{zi}(t)$: • soma de $e^{-0{,}5t}$ e de e^{-t} ponderada por A_1 e A_2

• A_1 e A_2 dependem das cond. iniciais

E por isso podemos afirmar que as duas exponenciais

$$e^{-0{,}5t}$$
$$e^{-t}$$

são características intrínsecas do sistema, independentes de toda a realidade externa e das condições iniciais. Chamam-se por isso, aos seus **expoentes** -0,5 e -1, **modos do sistema** e são como que o seu DNA.

Analisando mais em detalhe, obtemos

$$y_{zi}(t) = 2[y(0)+\dot{y}(0)]\,e^{-0{,}5t} + [-y(0)-2\dot{y}(0)]\,e^{-t}$$

Para certas combinações particulares de condições iniciais o sistema exibe um comportamento estranho. Vejamos.

Se

$$y(0) = -\dot{y}(0),$$

$$y_{zi}(t) = [-y(0) - 2\dot{y}(0)]\, e^{-t} = y(0)\, e^{-t}$$

a resposta só depende de um dos modos; o outro modo não aparece, não é excitado.

E se

$$y(0) = -2\dot{y}(0),$$

$$y_{zi}(t) = 2\,[y(0) + \dot{y}(0)]\, e^{-0,5t} = y(0)\, e^{-0,5t}$$

a resposta também só depende de um dos modos, não sendo o outro excitado.

Podemos assim constatar que,

- Os modos são excitados pelas condições iniciais.
- Existem condições iniciais especiais que excitam apenas alguns dos modos.
- Para um sistema de ordem 2 existem 2 modos. Para um sistema de ordem *n* existem *n* modos.

Qual a origem dos modos?
Se no exemplo da suspensão automóvel do Cap. 2 (2.13.3) considerarmos diferentes valores dos seus parâmetros, a que corresponde uma constituição física diferente, por exemplo, M=2, B=4, K=20, u=0, t≥0, vem

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u \Leftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = \frac{u}{2} = 0$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 10Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 2s + 10)\,Y(s) = s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)}{s^2 + 2s + 10}$$

Calculemos a resposta temporal, invertendo este Y(s):

$$Y(s) = \frac{s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)}{(s+1)^2 + 9} = \frac{(s\,y(0) + y_0) + (y_0 + \dot{y}_0)}{(s+1)^2 + 3^2}$$

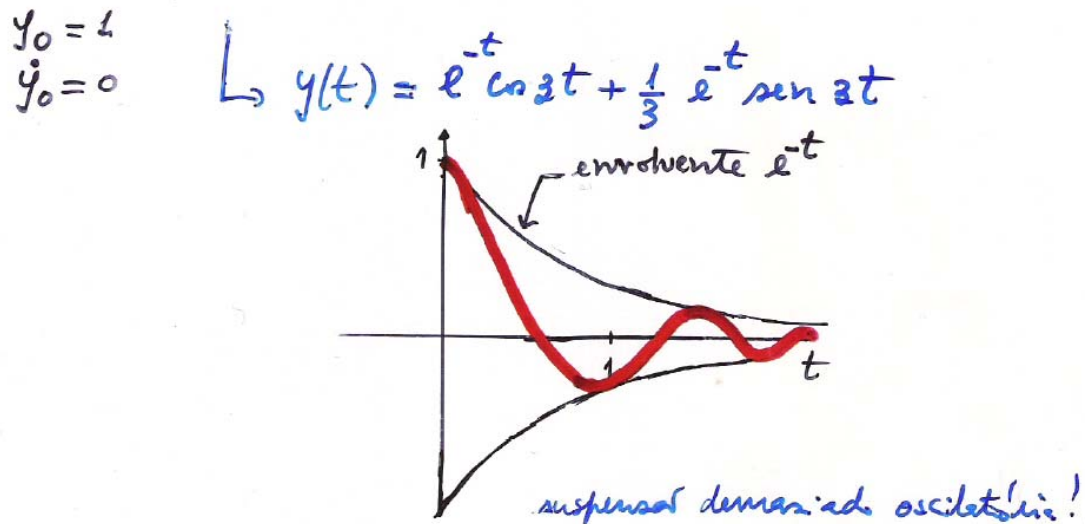
Desenvolvendo,

$$= \frac{y_0(s+1)}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{(y_0 + \dot{y}_0)}{(s+1)^2 + 3^2}$$

$$= y(0)\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}(y_0 + \dot{y}_0)\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Ou seja, consultando a tabela da transformada de Laplace,

$$y(t) = y(0).\,e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}(y_0 + \dot{y}_0)\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,3t$$

e graficando,

obtemos o movimento oscilatório da suspensão.

Se aumentarmos B de 4 para 14 (maior atrito, maior amortecimento) a suspensão deixa de oscilar (verifique, refazendo os cálculos, ou use o Simulink, com condições iniciais nos integradores).

Portanto os modos derivam das propriedades construtivas do sistema.

No caso geral temos, sendo *p* o operador de derivação,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\boxed{A(p)\,y(t) = B(p)\,u(t)}$$

Aplicando a transformada de Laplace (a ambos os lados da equação)

$$s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \dot{y}(0) - \cdots y^{(n-1)}(0)$$

$$+a_{n-1}\left[s^{(n-1)} Y(s) - s^{(n-2)} y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right]$$

$$\vdots$$

$$+ a_1\left[s Y(s) - y(0)\right] + a_0 Y(s) =$$

$$= b_m s^m U(s) - b_m s^{m-1} u(0) - b_{m-1} s^{m-2} \dot{u}(0) - \cdots - u^{(m-1)}(0)$$

$$+ b_{m-1} s^{m-1} U(s) - b_{m-1} s^{(m-2)} u(0) - b_{m-2} s^{m-3} \dot{u}(0) - \cdots - b_0 u^{(m-1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$+ b_1 s U(s) - b_1 u(0) + b_0 U(s)$$

ou seja, rearranjando,

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) + \left[-s^{n-1} y(0) \cdots - a_1 y(0)\right] =$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) + \left[-b_m s^{m-1} u(0) \cdots\right]$$

e se a entrada $u(t)$ for nula para todo o t

$$Y_{zi}(s) = \frac{s^{n-1} y(0) \cdots - a_1 y(0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

verifica-se que $Y_{zi}(s)$, e portanto $y_{zi}(t)$, depende das condições iniciais

3.4. Estabilidade em relação às condições iniciais

Se um modo do sistema tem parte real positiva, a sua exponencial tende para infinito. Dada uma condição inicial que excite esse modo, a saída do sistema tende por isso para infinito, ainda que a condição inicial seja muito pequena. De facto, a soma de uma exponencial crescente com exponenciais decrescentes tende para infinito.

Se um modo do sistema é nulo, ele contribui para a soma com a exponencial de zero, ou seja, com um termo constante.

Se existirem dois modos nulos, poderíamos pensar que cada um contribuiria com um termo constante e portanto a soma das suas contribuições seria um termo constante. Mas tal não é verdade.

Temos aqui uma demonstração do efeito de sinergia: o todo é maior do que a soma das partes. A contribuição conjugada de dois modos nulos, ou seja, de um modo nulo duplo, é um termo que tende para infinito com o tempo. Veja-se no Apêndice a transformada inversa de um modo nulo $1/s^2$.

No caso de modos puramente imaginários (com parte real nula) temos que considerar sinusoidais de amplitude constante, quando se trata apenas de um, ou de sinusoidais de amplitude crescente até ao infinito se se trata de um modo imaginário duplo.

Sempre que uma dada condição inicial excita um modo duplo com parte real nula, a saída do sistema tenderá para infinito, mesmo que a entrada seja nula. O sistema diz-se então **instável**. No caso contrário, em que todos os modos têm parte real negativa o sistema é **estável**. Um modo de parte real nulo mas de multiplicidade 1 mantém a **estabilidade** do sistema (em relação às condições iniciais): a saída não tenderá assimptoticamente para zero mas manter-se-á dentro de um certo intervalo finito.

Assim podemos enunciar uma condição necessária de estabilidade em relação às condições iniciais:

- É condição necessária de estabilidade que todos os modos se situem no semi-plano complexo esquerdo, ou seja, tenham parte real negativa, ou, no limite, se situem no eixo imaginário com multiplicidade 1.

Note-se que os modos imaginários aparecem aos pares conjugados: se existe por exemplo 2*i*, existirá também necessariamente -2*i*. Mas o modo é ainda de multiplicidade 1. Só no caso em que haja dois modos em 2*i* e outros dois em -2*i* é que o modo é duplo.

A resposta às condições iniciais pode representar-se por

$$Y_{zi}(s) = \frac{I(s)}{A(s)}$$

em que

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$I(s) = \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$

β_i : depende das condições iniciais $y(0), \dot{y}(0), \dots$

Chama-se a

$A(s) \triangleq$ polinómio característico do sistema

determina a resposta livre, ou não forçada, ou natural do sistema

raízes de $A(s) \triangleq$ modos do sistema

A resposta livre, ou não forçada, è a que se obtém com entrada nula (e condições iniciais não nulas).

3.5 Função de transferência

Seja o exemplo

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Calculando a transformada de Laplace, com todas as condições iniciais nulas,

$$(2s^2+3s+1)Y(s)=U(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{2s^2+3s+1}.U(s)$$

Ou seja

$$Y(s)= G(s)\,U(s)$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

relação entre as transformadas da saída e de entrada, com condições iniciais nulas.

G(s) “transfere” a entrada para a saída, ou de outro modo, a entrada transfere-se para a saída através ou pela acção de G(s) e por isso chama-se a G(s) **função de transferência**.

A função de transferência obtém-se a partir da equação diferencial de ordem *n* que descreve o sistema, aplicando-lhe a transformada de Laplace e resolvendo para Y/U.

Se tivermos a possibilidade de aplicar um impulso de Dirac ao sistema, a sua resposta será

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s).1 = G(s)$$

e portanto

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

ou seja, a função de transferência também se pode definir como a transformada de Laplace da resposta do sistema a um impulso de Dirac. Por isso se conhecermos a função de transferência e quisermos calcular a resposta impulsional *h(t)*, basta fazermos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s).\mathcal{L}[\delta(t)]\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(s).1] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Por exemplo

$$G(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \rightarrow h(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Note-se que a saída tem duas exponenciais, cada uma delas produzida por uma das fracções parciais. E é sempre assim: a resposta impulsional é a soma das contribuições de cada fracção parcial da função de transferência. Se forem fracções simples, resulta numa soma de exponenciais.

Exemplos de cálculo da função de transferência:

- sistema de dois tanques (ingestão de um fármaco no Cap. 2), com $A_1=A_2=1$)

$$A_1 A_2 R_1 R_2 \ddot{q}_2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)\dot{q}_2 + q_2 = q_i$$

$$\left[s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s(A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2) + 1\right] Q_2(s) = Q_i(s)$$

$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s(A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)}$$

• suspensão automóvel $M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$

$$(s^2M + sB + K)Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2M + sB + K}$$

No caso geral, sendo *p* o operador de derivação,

• Caso geral $A(p)y(t) = B(p)u(t)$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Polos e zeros da função de transferência

Os polos de G(s) são as raízes do seu denominador.

Os zeros são as raízes do seu numerador.

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$B(s) = 0 \rightarrow$ zero

$A(s) = 0 \rightarrow$ polo

se $G(s)$ é própria (grau $A \geq$ grau B), A, B coprimos

Polo. Um número finito λ, real ou complexo é um polo de $G(s)$ se $G(\lambda) = \infty$

zero. Um número finito λ, real ou complexo é um zero de $G(s)$ se $G(\lambda) = 0$

A função de transferência pode escrever-se com o numerador e o denominador factorizados, dizendo-se que está na forma polo-zero.

$z_1, z_2, \ldots, z_m$: zeros

$p_1, p_2, \ldots, p_n$: polos $\qquad n \geq m$

$$G(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

A função de transferência é assim completamente caracterizada por

- os polos

- os zeros

- o ganho K, no numerador, uma constante característica do sistema.

$$N(s)=0 \iff (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$$

$$KN(s)=0 \iff K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0, \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

os zeros só por si não definem completamente o numerador

Se por exemplo tivermos uma função de transferência G(s) com

- zeros: -2, -3
- polos: -1, -0.5, -4
- G(0)=5

Dos polos e zeros poderemos escrever

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+0,5)(s+4)} \,,\; K?$$

Para calcularmo o valor de K usa-se o terceiro dado, obtendo-se

$$G(0) = 5 \qquad G(0) = 5 = \frac{K.2.3}{1.0,5.4} = 3K$$

$$\Rightarrow K = 5/3$$

$$G(s) = \frac{5/3\,(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+0,5)(s+4)}$$

Qual é o significado físico de um zero de uma função de transferência?

Se aplicarmos ao sistema uma entrada cuja transformada de Laplace U(s) tem um polo no denominador igual a um zero da função de transferência G(s), quando multiplicamos G(s)U(s), esse polo vai cortar com o zero de G(s) e o seu efeito na saída fica assim anulado. Se por acaso a entrada tem só esse polo, ela não influenciará a saída.

3.6. Cálculo da saída, conhecida a função de transferência

Conhecida a função de transferência de um sistema, definida uma entrada para ele (no domínio complexo), a saída no domínio temporal calcula-se simplesmente por

$$U(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) . U(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$: entrada com condições iniciais nulas.

Vejamos um exemplo, de um sistema com uma entrada em degrau unitário.

$$G(s) = \frac{1/2}{(s+0,5)(s+1)}$$

$$U(s) = \mathcal{L}[q(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{(degrau unitário)}$$

$$Y(s) = G(s) . U(s) = \frac{1/2}{(s+0,5)(s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{A_1}{s+0,5} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s} = -2\frac{1}{s+0,5} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

Os resíduos foram calculados por

$$A_1 = (s+0{,}5)Y(s)\Big|_{s=-0{,}5} = \frac{1/2}{s(s+1)}\Big|_{s=-0{,}5} = -2$$

$$A_2 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1/2}{(s+0{,}5)\,s}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$A_3 = s\,Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{1/2}{(s+0{,}5)(s+1)} = 1$$

e finalmente, consultando a tabela de transformadas,

$$y(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-0{,}5t}$$

Vejamos as diversas componentes de y(t)

$$y(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-0{,}5t}, \quad t \geq 0$$

1: devido à entrada U(s)

$e^{-t} - 2e^{-0{,}5t}$: devido aos dois polos do sistema

Poderemos extrair a conclusão de que a forma da resposta com condições iniciais nulas e entrada U(s) não nula depende de:

- polos de G(s)
- polos de U(s)

Exemplo (Chen, 184)

$$G(s) = \frac{(s+10)(s-2)(s-1)^2}{s^3(s+2)(s+3)(s+2-j2)(s+2+j2)}$$

para qualquer entrada $U(s)$,

$$y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + A_4 e^{-2t} + A_5 e^{-3t} + \underbrace{A_6 e^{-(2-j2)t} + A_7 e^{-(2+j2)t}}_{\bar{A}_6 e^{-2t} \operatorname{sen} 2t + \bar{A}_7 e^{-2t} \cos 2t}$$

+ termos devidos aos polos de $U(s)$

— i) $U(s)$ não tem polos iguais a zeros de $G(s)$ nem polos comuns com $G(s)$

$$U(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2,5)}$$

termos devidos aos polos de $U(s)$

$$A_8 e^{-t} + A_9 e^{-2,5t}$$

— ii) U(s) não tem polos iguais a zeros de G(s) mas tem polos comuns com G(s)

$$U(s) = \frac{(s-3)}{s(s+2)}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{(s+10)(s-2)(s-1)^2(s-3)}{s^4(s+2)^2(s+3)(s+2-j2)(s+2+j2)}$$

aumentou a multiplicidade

$$y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + A_4 t^3 + A_5 e^{-2t} + A_6 t e^{-2t} + A_7 e^{-3t} + A_8 e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,2t + A_9 e^{-2t}\cos 2t$$

termos devidos a U(s): $A_4 t^3$, $A_6 t e^{-2t}$

— iii) U(s) tem polos iguais a zeros de G(s) e não tem polos comuns com G(s)

$$U(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s-2)}$$

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{(s+10)(s-2)(s-1)^2}{s^3(s+2)(s+3)(s+2-j2)(s+2+j2)}\cdot\frac{s-3}{(s+1)(s-2)}$$

termos devidos a U(s): $A e^{-t}$

iv) U(s) tem zeros iguais a polos de G(s) e não tem polos comuns c/ G(s)

$$U(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+4)}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{(s+10)(s-2)(s-1)^2}{s^3(s+2)(s+3)(s+2-j2)(s+2+j2)} \cdot \frac{s+3}{(s+1)(s+4)}$$

U(s) introduz e^{-t}, e^{-4t}
anula e^{-3t} (o polo −3 não é excitado pela entrada).

Chama-se **cancelamento polo-zero** ao que acontece em iii) e iv). O cancelamento elimina da resposta (do sistema) características intrínsecas do sistema, e por isso é um acontecimento que não deve acontecer.

Através deste exemplo poderemos generalizar e concluir que:

- Quando U(s) tem um polo igual a um outro da função de transferência, resulta em Y(s) um polo duplo. Este polo duplo introduz um efeito próprio na resposta temporal devido à sua duplicidade.

- Quando U(s) tem um zero igual a um polo de G(s), então em Y(s) dá-se um cancelamento de um polo por um zero que elimina o efeito desse polo.

- De modo semelhante quando G(s) tem um zero igual a um polo de U(s) dá-se também um cancelamento que elimina o efeito desse polo na resposta temporal.

Como vimos anteriormente, a resposta temporal com entrada nula e condições iniciais não nulas é determinada pelos modos do polinómio característico.

Considere-se o exemplo

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(2s+3)y(0) + 2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{1}{2s^2+3s+1}U(s)}_{Y_{zs}}$$

polinómio característico : $2s^2+3s+1$

função de transferência ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$)

$$G(s) = \frac{1}{2s^2+3s+1}$$

denominador $D(s)$: $2s^2+3s+1$

O denominador da função de transferência é igual ao polinómio característico. Logo os polos são iguais aos modos.

Vejamos outro exemplo

$$2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = \dot{u} + u$$

$$(2s^2+3s+1)Y(s) - s2y(0) - 2\dot{y}(0) - 3y(0) = (s+1)U(s) - u(0)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s2y(0)+2\dot{y}(0)+3y(0)-u(0)}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{s+1}{2s^2+3s+1}\cdot U(s)}_{Y_{zs}}$$

$$= \frac{s2y(0)+2\dot{y}(0)+3y(0)-u(0)}{2(s+1)(s+0,5)} + \frac{s+1}{2(s+1)(s+0,5)} \cdot U(s)$$

$$- \qquad + \frac{1/2}{s+0,5} \cdot U(s)$$

polinómio característico: $2s^2+3s+1$

modos: $-1, -0,5$

denominador de $G(s)$: $s+0,5$

polos: $-0,5$

Assim:

- todos os polos são modos, mas nem sempre todos os modos são polos
- se há um cancelamento polo-zero no cálculo da função de transferência, há um modo que é eliminado, e a função de transferência deixa de ser uma representação completa do sistema.

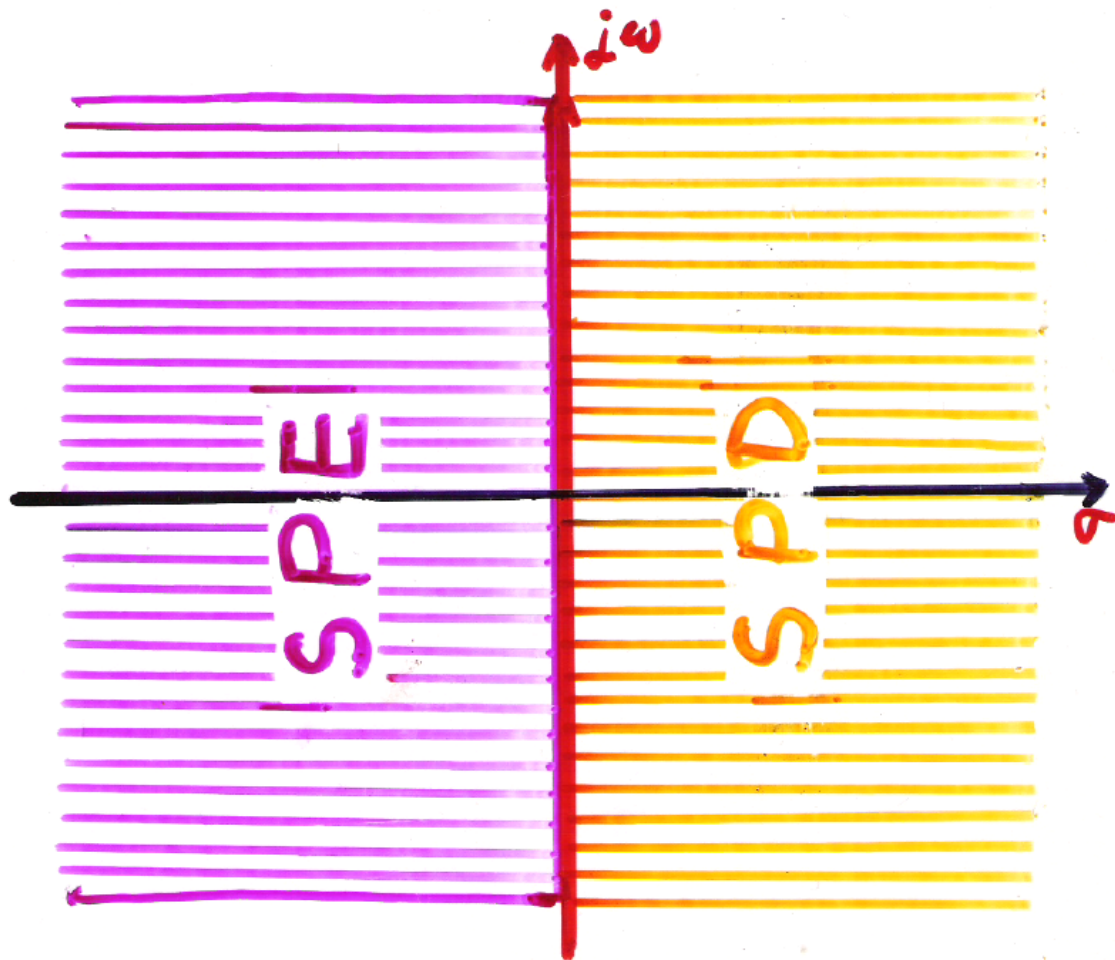
3.7 Resposta temporal dos polos e modos em função da sua localização no plano complexo.

O plano complexo pode-se representar pela figura seguinte.

$j\omega$

SPE

SPD

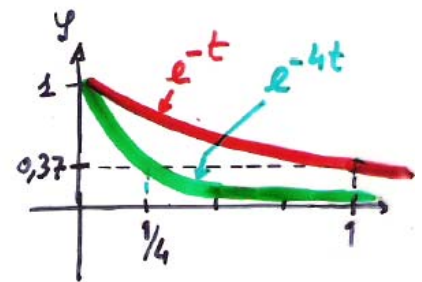
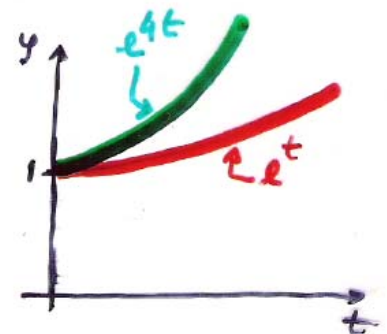
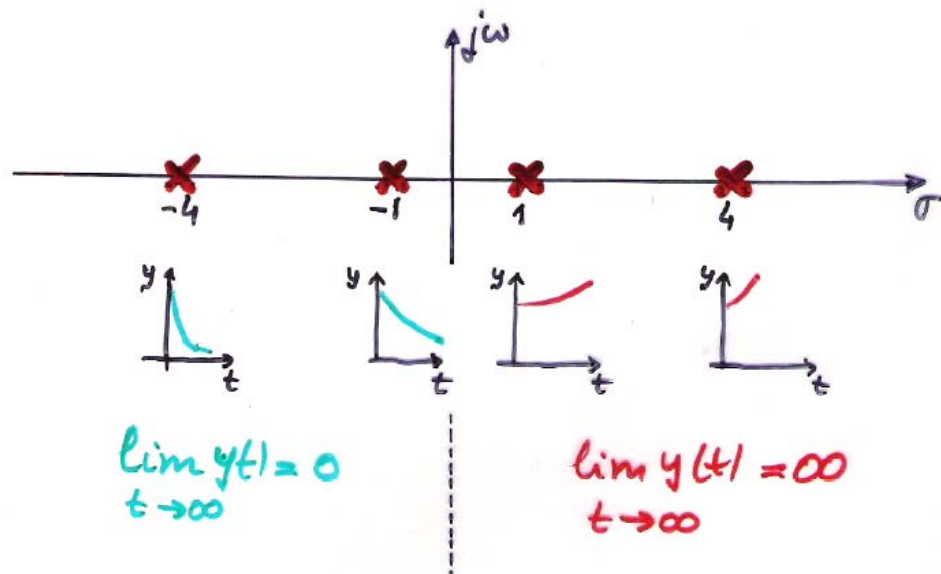
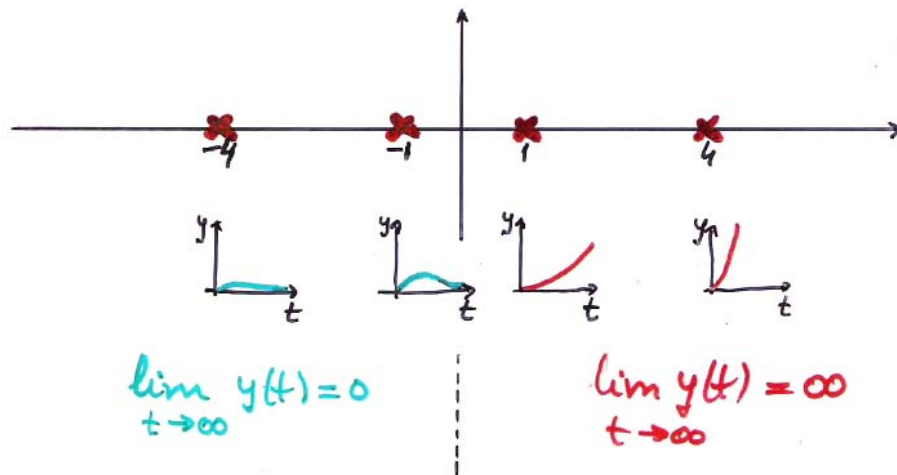
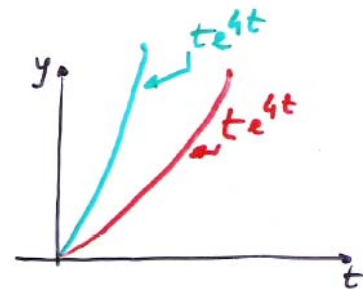
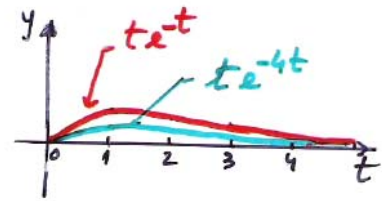
σ

$$s = \sigma + j\omega$$

parte real

parte imaginária

O SPE é o Semi-Plano Esquerdo e o SPD o Semi-Plano Direito. Qualquer polo e qualquer zero se situam neste plano. Como sabemos os polos podem ter natureza diversa. Eles podem ser

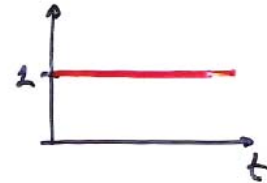
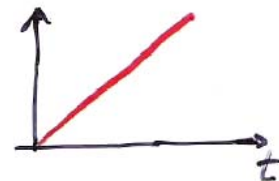
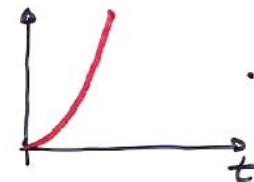
Vejamos o que acontece nessas diversas situações.

ii) . Polo real multiplo

Conclusão:

- os polos reais que se situam no SPE contribuem com termos decrescentes
- os polos reais que se situam no SPD contribuem com termos crescentes

iii) **Polos na origem**

simples

$$Y(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y(t) = 1$$

múltiplos

Conclusão:

Polo na origem

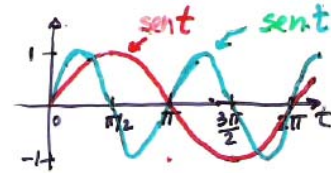
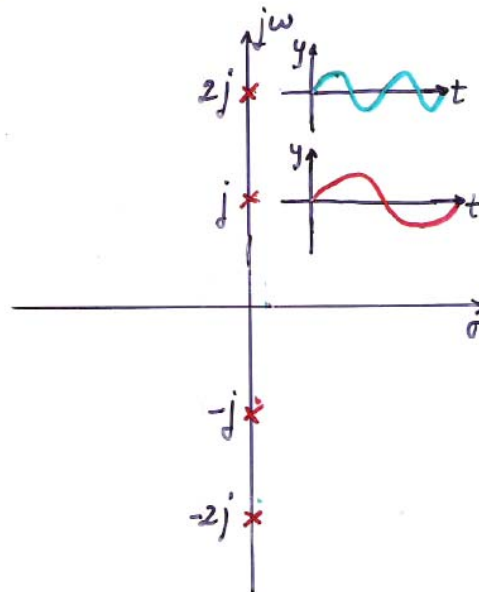
simples – contribui com um termo constante

múltiplo – contribui com um termo crescente

iv) Polos imaginários conjugados

simples

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow y(t) = \text{sen}\, t$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\text{sen}\, 2t$$

conclusão

- polos imaginários simples contribuem com sinusoidais puras

Múltiplos

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \longrightarrow y(t) = t\,\text{sen}\,t$$

crescente com t

v) Polos complexos conjugados (simples)

- multiplicam o efeito dos reais pelo efeito dos imaginários

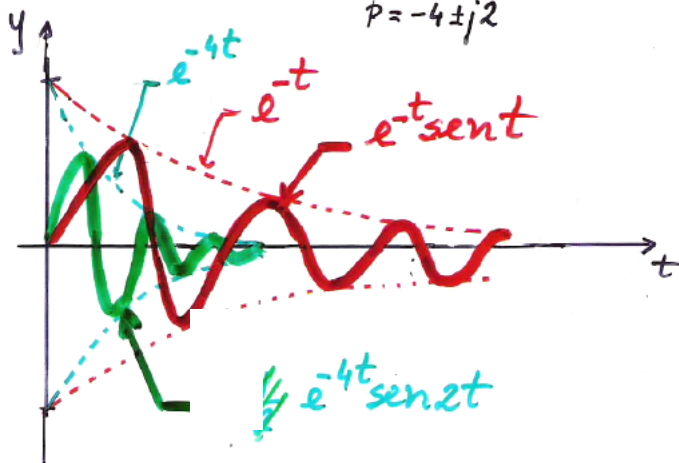
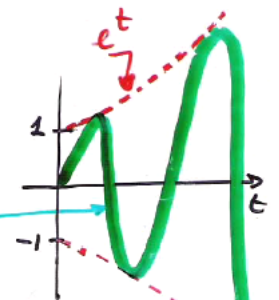
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \rightarrow y(t) = e^{-t}\,\text{sen}\,t$$

$$p = -1 \pm j$$

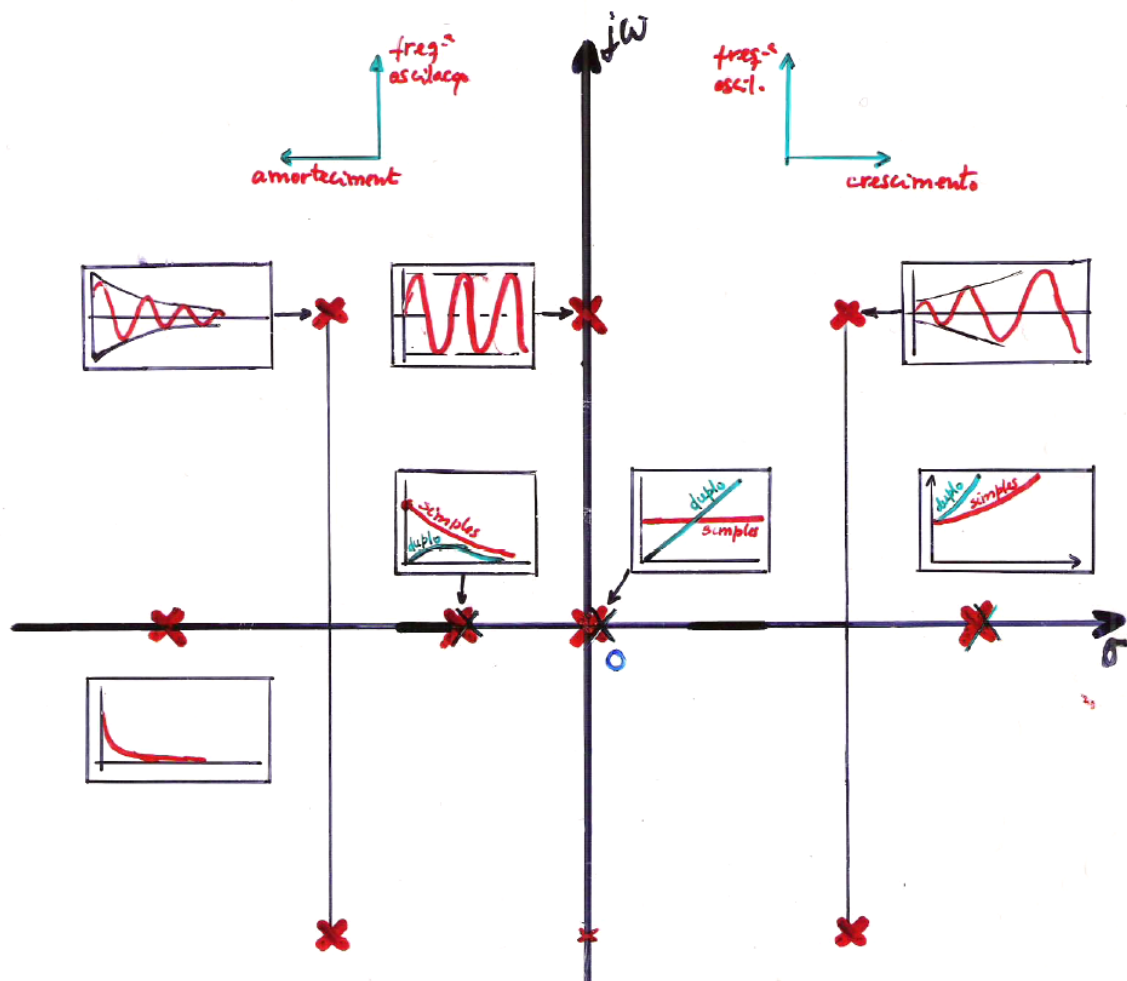
$$Y(s) = \frac{2}{(s+4)^2+2^2} \rightarrow y(t) = e^{-4t}\,\text{sen}\,2t$$

$$p = -4 \pm j2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \longrightarrow y(t) = e^{t}\,\text{sen}\,t$$

$$p = 1 \pm j$$

e^{t}, 1, -1, t

p= - 4 ± j2

Sintetizando todos os casos que vimos, obtemos a figura seguinte.

3.8. Estabilidade BIBO- *Bounded Input Bounded Output*

Um sistema diz-se **BIBO- estável** se a uma entrada u(t) limitada (BI-Bounded Input) corresponde uma saída limitada (BO-Bounded Output)

No geral vimos que

$$y_{zs}(t) = \{\text{devido aos polos de } G(s)\} + \\ + \{\text{devido aos polos de } U(s)\}$$

Se os polos de U(s) têm parte real negativa, ou, sendo imaginários puros têm multiplicidade um, a entrada u(t) é limitada e a sua contribuição para a saída é também limitada.

Se os polos de G(s) têm parte real negativa (com qualquer multiplicidade), a sua contribuição para a saída extingue-se com o tempo.

Assim

É condição necessária e suficiente de estabilidade BIBO que os polos de G(s) se situem no SPE

Considerando a relação entre os modos e os polos, poderemos dizer que

- **é condição necessária e suficiente de estabilidade BIBO que os modos se situem no SPE.**

Quando há um cancelamento, isso não quer dizer que o modo do sistema cancelado desaparece. Acontece simplesmente que ele deixa de ser visível na função de transferência, mas o seu efeito permanece.

3.9 Influência dos zeros na resposta temporal

Sejam o casos seguintes e as respetivas respostas temporais

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left[(\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt}\right]$$

o zero altera os coeficientes das exponenciais

Se por exemplo a=1, b=2, sem o zero teremos

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Com o zero será

$$\alpha = 0{,}5 \Rightarrow y(t) = -0{,}5e^{t} + 1{,}5e^{-2t}$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$y(t)$ é uma combinação linear de exponenciais

- os polos definem a forma das exponenciais (acção qualitativa)
- os zeros definem os coeficientes dessa combinação linear. (acção quantitativa)

3.10. Resposta temporal a um degrau dos sistemas lineares e invariantes

Seja o sistema

com função de transferência

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad m < n$$

$$= \frac{K (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Consideremos o caso

- $m < n$, $G(s)$ estritamente própria
- todos os polos se situam no SPE

que é suficientemente geral para abranger todos os casos práticos.

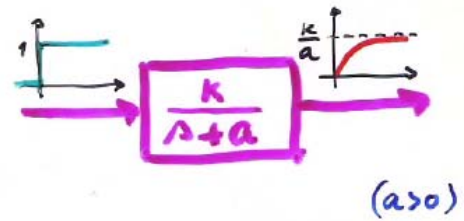
A ordem do sistema é n, e considere-se uma entrada em degrau unitário.

ordem do sistema $= n$, grau de $A(s)$.

$U(s) = \frac{1}{s}$: muito útil para caracterizar o sistema.

i) sistemas de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

(a>0)

donde,

$$Y(s) = \frac{K}{s+a} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+a}$$

Calculando,

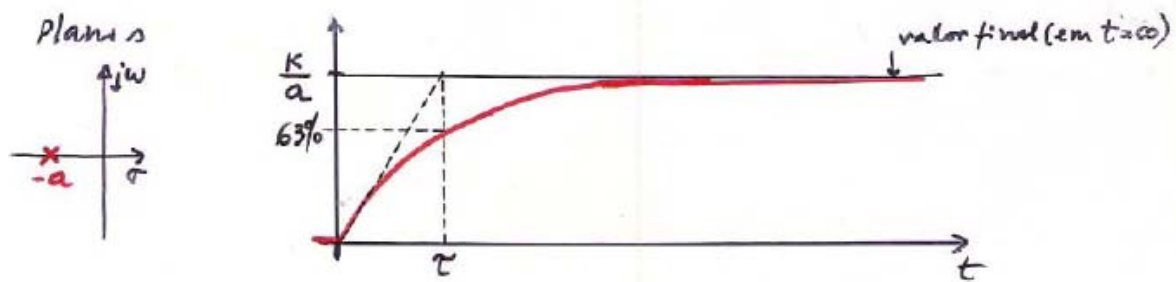
$$A_1 = s \cdot Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{K}{s+a}\Big|_{s=0} = \frac{K}{a}$$

$$A_2 = (s+a)Y(s)\Big|_{s=-a} = \frac{K}{s}\Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a}$$

obtém-se

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K/a}{s} - \frac{K}{a}\frac{1}{s+a}\right]$$

$$y(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a}e^{-at} = \frac{K}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

e graficando observam-se as características gráficas (ganho, constante de tempo)

ii) sistemas de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

polos de $G(s)$ em função de a_1 e a_0:

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Neste caso temos várias possibilidades para o tipo de polos:

- $a_1^2 > 4a_0$ – 2 polos reais simples
- $a_1^2 = 4a_0$ – 1 polo real duplo
- $a_1^2 < 4a_0$ – 2 polos complexos conjugados

É frequente, por ser mais conveniente, usar a seguinte notação para sistemas de 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- $\xi > 1 \rightarrow$ 2 polos reais simples
- $\xi = 1 \rightarrow$ 1 polo real duplo
- $0 < \xi < 1 \rightarrow$ 2 polos complexos conjugados
  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

O tipo de raízes depende do parâmetro ξ

i) $\xi > 1$, 2 polos reais distintos

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Exemplo

$$G(s) = \frac{K}{s^2+3s+2} = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \qquad \omega_n = \sqrt{2}, \quad \xi = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

$$= \frac{K/2}{s} - \frac{K}{s+1} + \frac{K/2}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{K}{2} - K e^{-t} + \frac{K}{2} e^{-2t} \qquad y(0) = 0, \quad y(\infty) = \frac{K}{2}$$

Graficando,

ii) $\xi = 1$, um polo real duplo

Exemplo

$$G(s) = \frac{K}{s^2+2s+1} = \frac{K}{(s+1)^2}$$

$\omega_n = 1$
$\xi = 1$

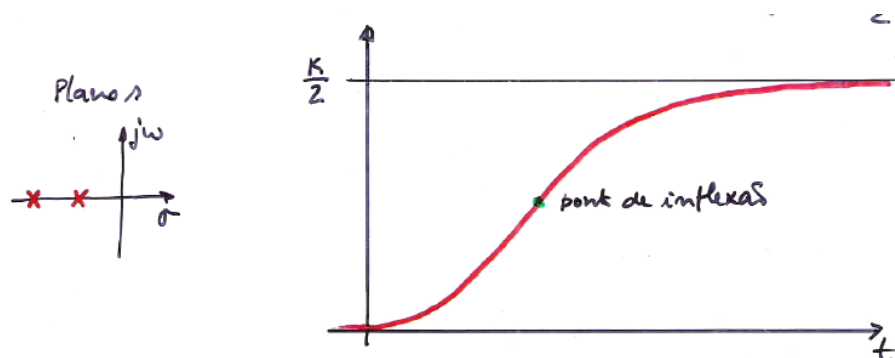
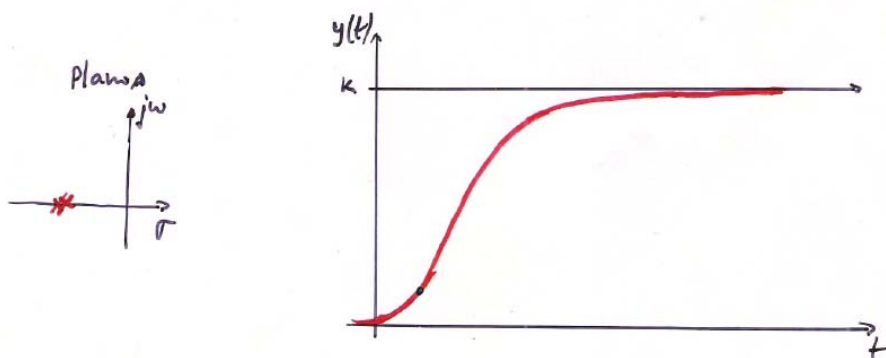
Por exemplo,

$$Y(s) = \frac{K}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+1}$$

$$= \frac{K}{s} - \frac{K}{(s+1)^2} - \frac{K}{s+1}$$

$$y(t) = K - K t e^{-t} - K e^{-t} = K[1 - e^{-t} - t e^{-t}]$$

$y(0) = 0$
$y(\infty) = K$

cujo aspecto gráfico é o seguinte.

características
- ganho K
- forma da curva, depende de ω_n.

iii) $0 < \xi < 1$, 2 polos complexos conjugados

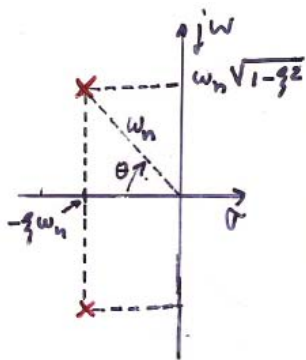
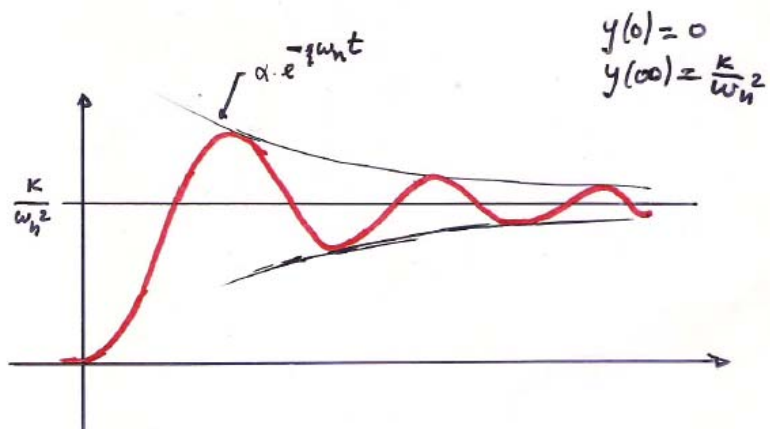
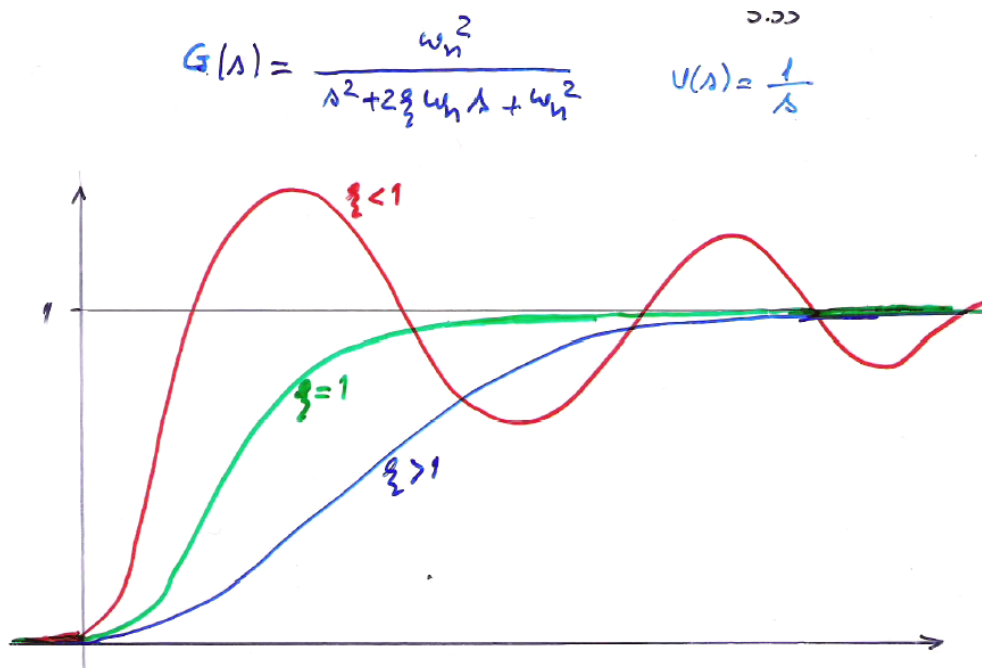
$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

A saída, para uma entrada em degrau unitário virá,

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

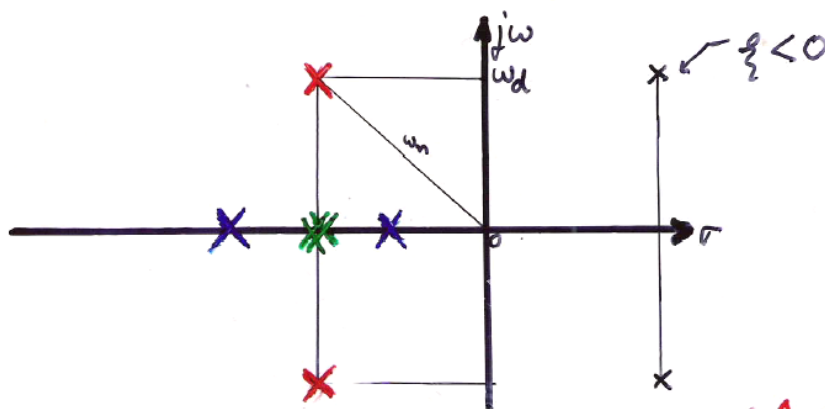
$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} - \frac{K}{\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \theta\right)$$

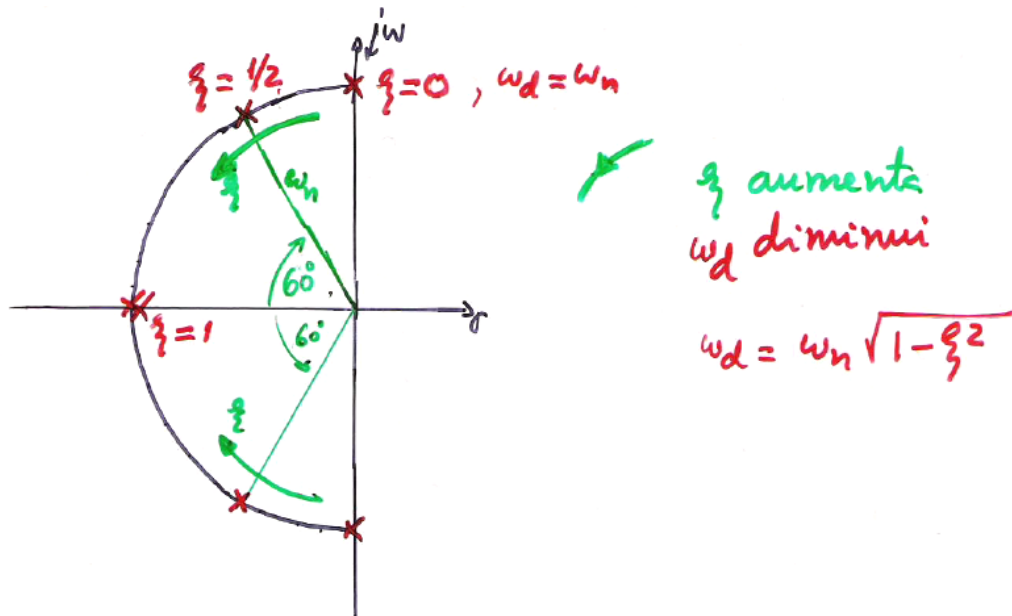
$$\theta = \cos^{-1}\xi$$

Graficamente teremos

Juntando agora os três casos numa só figura,

A resposta *y(t)* classifica-se como

$0<\xi<1$: resposta sub-amortecida

$\xi=1$: resposta com amortecimento crítico

$\xi>1$: resposta sobre-amortecida

O **coeficiente de amortecimento** e a **frequência natural** são propriedades intrínsecas do sistema.

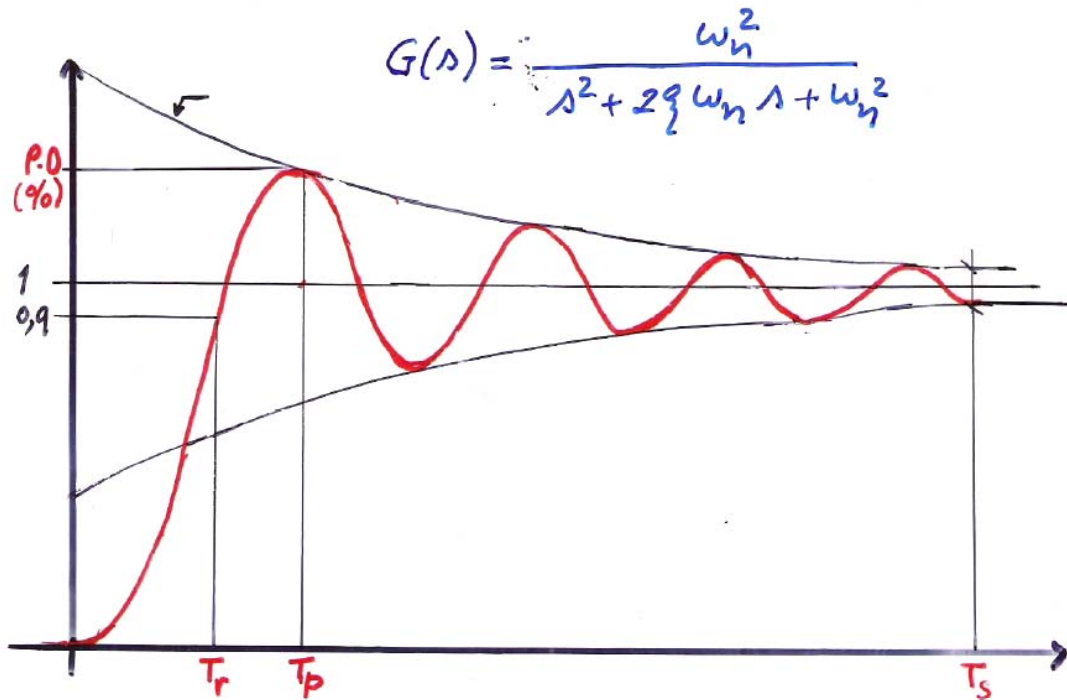
Representando no plano complexo, ω_n é o módulo das raízes complexas e ξ o cosseno do ângulo com o eixo real negativo (ver figura seguinte).

A frequência natural amortecida depende desses dois parâmetros. Como se vê na figura, se ξ aumenta, os polos aproximam-se do eixo real e ω_d diminui.

A frequência natural também se chama frequência de ressonância do sistema.

Há várias características da resposta temporal de sistemas de 2ª ordem que têm interesse prático, e são ilustradas na figura seguinte.

Por exemplo o **tempo de subida** exprime a rapidez do sistema a responder a uma entrada.

O **tempo de estabelecimento** mede o tempo que o sistema leva para alcançar um regime final (constante) quando a entrada é um degrau.

A **sobre-elevação** mede uma característica frequente de sistemas dinâmicos: a resposta ultrapassa o valor final antes de se estabelecer.

Características principais ξ, ω_n

$\tau = 1/(\xi\omega_n)$ constante de tempo

$T_r = \frac{2}{\omega_n}$ seg. tempo de subida (de 0 a 90%)

$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ tempo de pico

$P.O = 100 \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ sobre-elevação, em % (Peak overshoot)

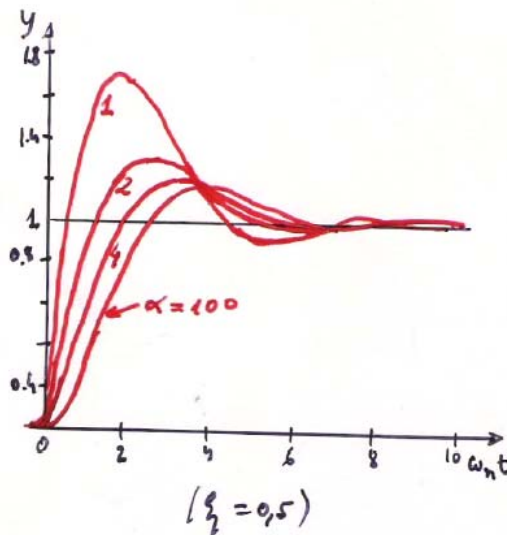
$T_s = 3\tau$ (5%) tempo de estabelecimento até % erro

4τ (2%)

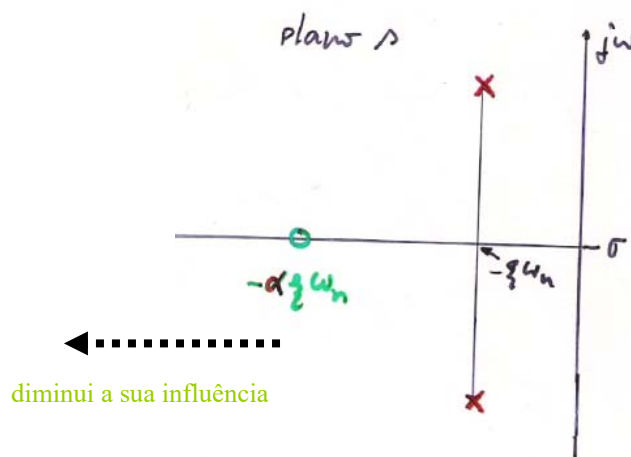
Efeito da introdução de um zero:

Se introduzirmos um zero no sistema de 2ª ordem anterior, teremos

$$G(s) = \frac{\omega_n (s + \alpha\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \alpha > 0 \ (\in \mathbb{R})$$

O zero está expresso como um múltiplo de $\xi\omega_n$, a parte real dos polos, por conveniência de análise. Fazendo simulações para diversos valores de α, obtêm-se os gráficos da figura seguinte, para o caso de ξ=0,5.

O zero altera fundamentalmente a sobre-elevação e o tempo de subida. Quanto mais influente é, menor é o tempo de subida, mais rápido é o sistema) e maior a sobre-elevação.

O zero tem assim um efeito de aceleração.

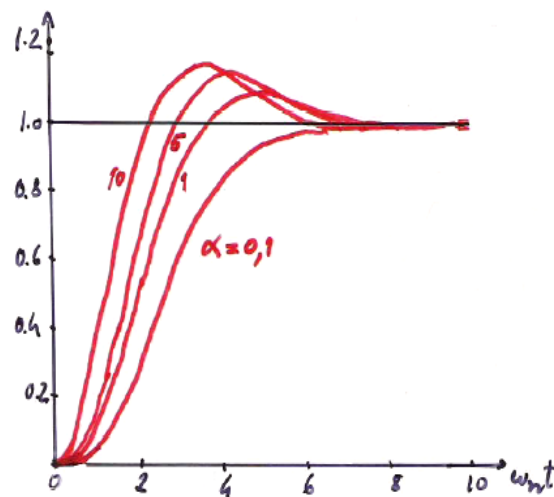
A localização do zero no plano complexo determina a intensidade desse efeito.

Quanto mais longe dos polos estiver o zero (em direção a -∞), menor é a sua influência.

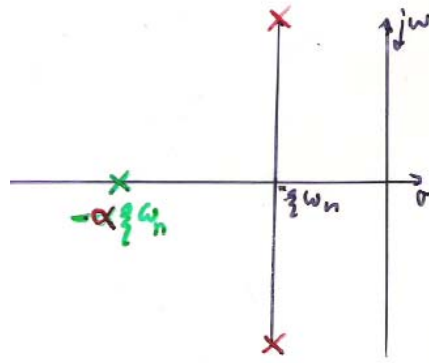
E se se introduzir um polo adicional, passando-se a um sistema de 3ª ordem ?

3.11. Sistemas de 3ª ordem

Um sistema de 3ª ordem tem três polos e pode obter-se de um de 2ª com um polo adicional. Para manter G(0)=1, a fim de simplificar a graficação com a saída a tender para 1, como nos casos anteriores, seja G(s)

$$G(s) = \frac{\alpha \xi \omega_n^3}{(s + \alpha \xi \omega_n)(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

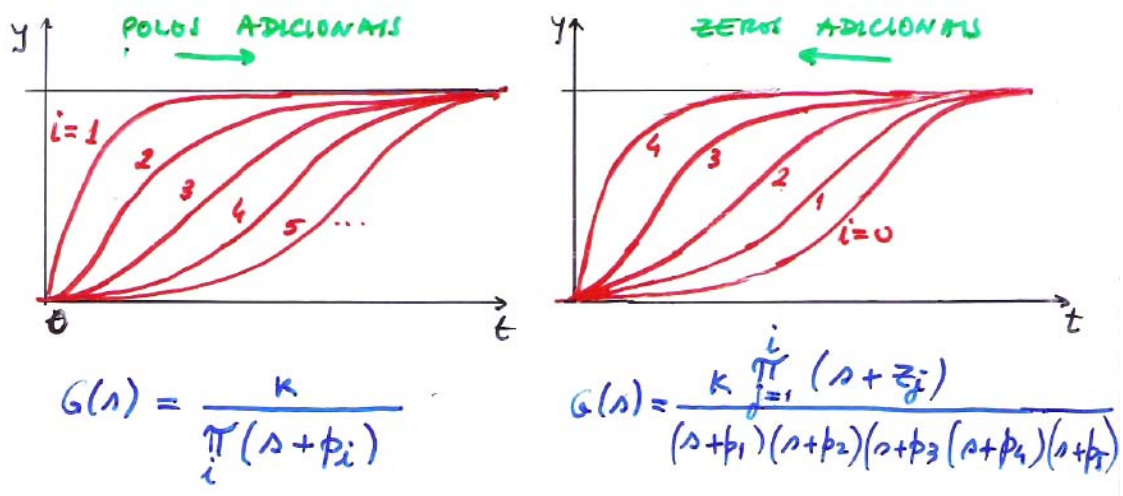
Para uma entrada em degrau, e simulando para vários valores de α, obtêm-se as curvas da figura seguinte.

O terceiro polo aumenta o tempo de subida, a resposta fica mais lenta. Quanto mais próximo estiver da origem, mais influente é. Em -∞ não tem influência.

A posição do terceiro polo depende do valor de α.

Quanto mais à esquerda estiver o polo, menos influente se torna.

3.12. Sistemas de 4ª ordem e superior

Do que vimos anteriormente podem-se enunciar os seguintes princípios gerais:

- um zero adicional acelera a resposta e aumenta a sobre-elevação (torna o sistema "mais leve", "mais ágil")
- um polo adicional trava a resposta e diminui a sobre-elevação (torna o sistema "mais pesado", "menos ágil").

Graficamente, teremos os seguintes efeitos sobre a resposta temporal, para uma entrada em degrau:

3.13. Sistemas de fase não-mínima (zeros no SPD)

Para que um sistema seja estável, não pode ter polos no Semi-Plano Direito, e por isso se diz que o SPD é a região de instabilidade.

Os zeros não influenciam a estabilidade e podem situar-se, desse ponto de vista, em qualquer ponto do plano complexo. No entanto influenciam o regime transitório da resposta. Podemos dizer que os zeros não influenciam o longo prazo, mas apenas o curto-prazo.

Vejamos um exemplo de uma função de transferência com um zero no SPD. Sejam

$$\text{i) } G(s)=\frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{ii) } G(s)=\frac{-(s-2)}{(s+1)(s+2)} \quad \text{e} \quad U(s)=\frac{1}{s}$$

Note-se que as funções de transferência têm ganhos de sinal contrário.

Para a primeira teremos

$$Y(s)=\frac{s-2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{A_3}{s+2}=\frac{-1}{s}+\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{s+2}$$

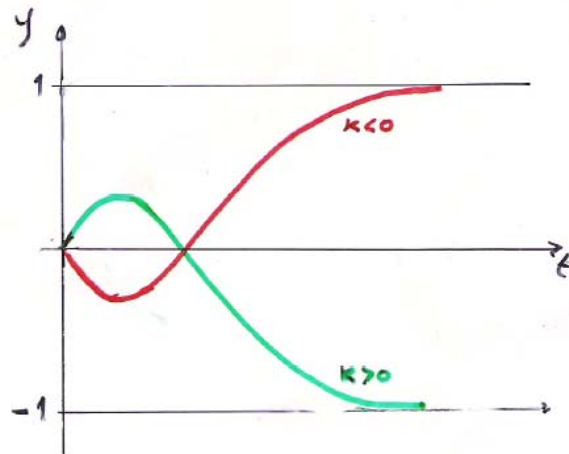
$$y(t)=-1+3e^{-t}-2e^{-2t}$$

Para a segunda-feira, e dado o sinal contrário de G(s), teremos uma saída simétrica.

$$G(s)=\frac{-(s-2)}{(s+1)(s+2)} \quad (K=-1)$$

$$Y(s)=\frac{-(s-2)}{s(s+1)(s+2)}$$

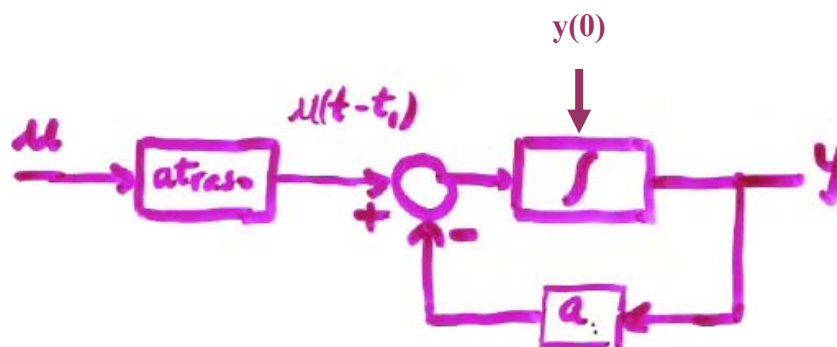
$$y(t)=1-3e^{-t}+2e^{-2t}$$

Graficando, obtém-se a figura seguinte, que ilustra o comportamento típico dos sistemas chamados de **fase não-mínima** ou de **resposta inversa** (porque a resposta inicia-se em direção contrária à final).

3.14. Sistemas com atraso puro

A equação diferencial

$$\dot{y}(t) + a\,y(t) = b\,u(t-t_1)$$

diz-nos que a entrada do instante t-t_1 influencia a saída no instante t. A entrada necessita de um intervalo de tempo t_1 para ter efeito sobre a saída. Diz-se que t_1 é um **atraso puro** (*pure time delay*).

O diagrama de simulação desta equação diferencial é

Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial, tendo em atenção a propriedade de deslocamento temporal, e invertendo, obtém se

$$(s+a)Y(s) = y(0) + b\,e^{-st_1}U(s)$$

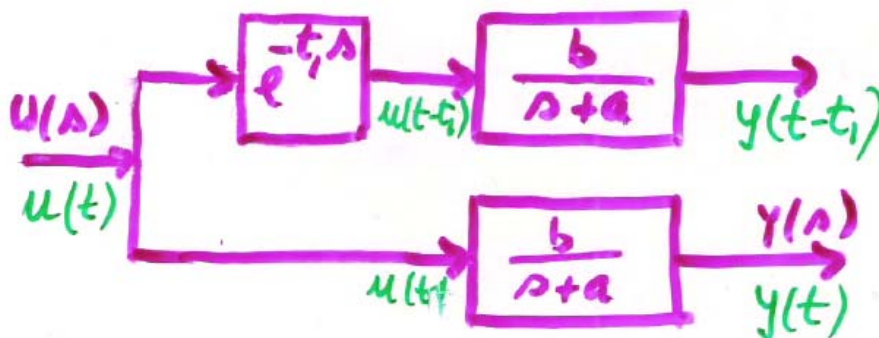
$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y(0)}{s+a}\right]}_{\substack{y_{zi} \\ \text{inalterada p/ atraso}}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s+a}e^{-st_1}U(s)\right]}_{\substack{y_{zs} \\ \text{alterada p/ atraso}}}$$

Ou seja, a resposta às condições iniciais não é afectada pelo atraso (como era de prever, atendendo ao diagrama de simulação, dado que elas entram directamente no integrador). Mas a resposta à entrada é afectada pelo atraso. Considerando-a separadamente,

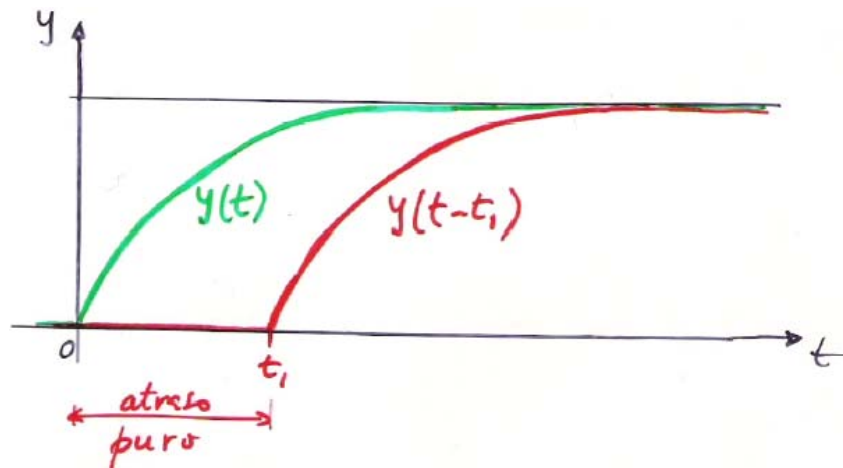
$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\substack{\text{cond. in.} \\ \text{nulas}}} = \frac{b}{s+a}e^{-st_1} \quad \boxed{\text{não racional}}$$

obtém-se uma função não-racional, e, portanto, para ela não é possível calcular a transformada inversa de Laplace.

Com calcular y(t) nestas circunstâncias adversas ?

Tomemos o seguinte dois sistemas em paralelo, com a mesma entrada,

Na parte de baixo, não havendo atraso puro, não há qualquer problema em calcular y(t). Mas na parte de cima aparece o termo irracional do atraso puro.

Mas haverá alguma relação entre a saída de cima e a de baixo? Se houver, e se a conhecermos, poderemos obter a resposta de cima desde que tenhamos obtido a resposta de baixo.

Ora atendendo à natureza do atraso puro, um efeito que apenas retarda as coisas, poderemos concluir que a relação entre as duas entradas é ilustrada pela figura seguinte.

Em geral, para a mesma entrada U(s)

$$\text{se} \quad G_1(s) = G(s) \cdot e^{-st_1}$$

$$Y_1(s) = Y(s)\, e^{-st_1}$$

$$y_1(t) = y(t-t_1)$$

Exemplo de um sistema com atraso puro (Murray, Mathematical Biology, 42).

Há uma teoria segundo a qual a concentração de dióxido de carbono no sangue controla os níveis de respiração através de uma malha de *feedback* com atraso puro. Pode-se adoptar um modelo simples, adimensional, na seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = 1 - axV(x(t - T_d)), \qquad V(x) = \frac{x^m}{1 + x^m}$$

Sendo a e m constantes positivas e T_d o tempo de atraso puro.

Em Murray encontram-se modelos populacionais com atraso puro.

3.15. Resposta em regime final

A saída em regime final, ou o valor final da saída, é definido por,

$$y_{\infty} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

No caso em que u(t) é um degrau unitário,

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Aplicando o teorema do valor final (note-se que tal só é válido se G(s) for estável),

$$y_{\infty} = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$= G(s)\Big|_{s=0} = G(0)$$

$$\boxed{y_{\infty} = G(0)}$$

Tendo $G(s)$, para calcular a resposta em regime final para uma entrada em degrau unitário, basta substituir s por zero em $G(s)$ e fazer as contas. O valor constante obtido é **o ganho** do sistema, isto é, o valor final da saída quando a entrada é um degrau unitário.

3.16. Síntese

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_0 u_0$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{[\text{condições iniciais}]}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}}_{Y_{zs}} \quad (m<n)$$

função de transferência

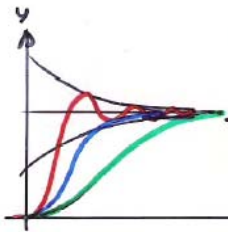
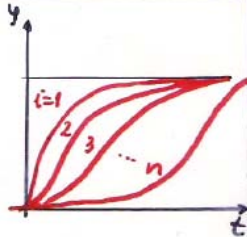
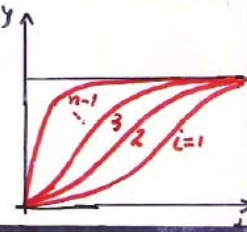
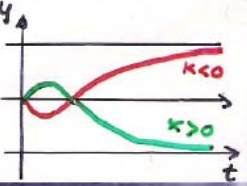
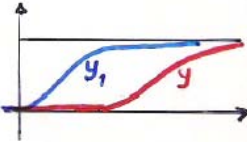
$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_m (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

zeros; polos

Polinómio característico

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (\text{de } Y_{zi})$$

Modos: raízes do polinómio característico

Estabilidade: estável (em relação a Y_{zi}) se todos os modos estão no SPE ou na origem com multiplicidade um.
BIBO estável se todos os polos estão no SPE.

Polos e modos: reais ou complexos conjugados, simples ou múltiplos.

zeros na resposta temporal: definem as constantes de combinação linear das exponenciais dos polos

resposta em regime final para entrada em degrau: $G(0)$

RESPOSTA A DEGRAU

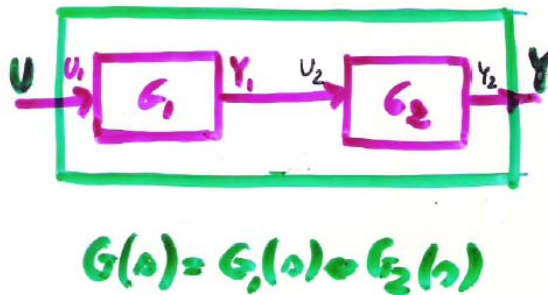
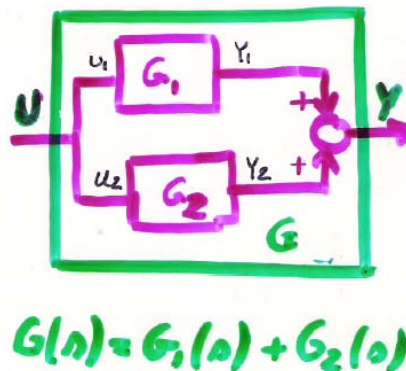
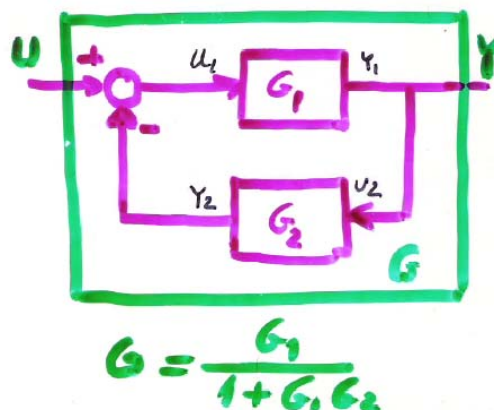
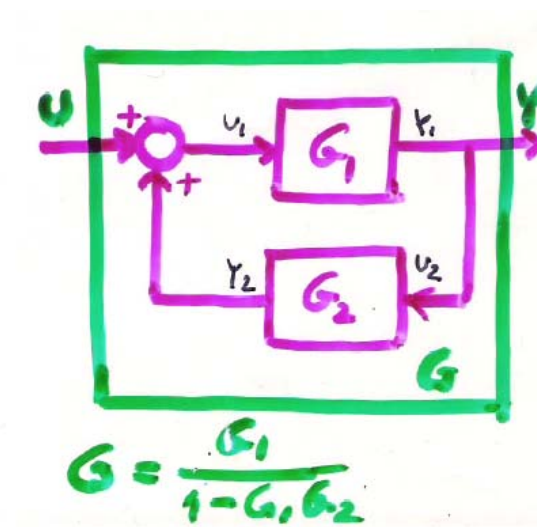
(análise qualitativa)

	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	RESPOSTA (t)
1ª	$G(s) = \frac{K}{s+a}$	y, $\frac{K}{a}$, t
2ª	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $1 < \xi$ polos reais simples (verde) $\xi = 1$ polo real duplo (azul) $0 < \xi < 1$ polos compl. conjugados (vermelho) $\xi < 0$ polos no SPD	y, t
≥3ª	$G(s) = \frac{K}{\prod_{j=1}^{i}(s+p_j)}$, $i = 3, \dots, n$	y, t, $i=1$, 2, 3, ..., n
EFEITO DOS ZEROS	$G(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{i}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$, $i = 1, \dots, n-1$	y, $n-1$, ..., 3, 2, $i=1$
FASE NÃO MÍNIMA	$G(s) = \frac{K(s-z)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$	y, t, $K<0$, $K>0$
ATRASO PURO	$G(s) = G_1(s) \cdot e^{-s t_1}$	y_1, y

3.17. Vantagens e limites da função de transferência.

A função de transferência é um conceito e uma ferramenta muito útil em estudos de dinâmica de sistemas. É fácil com ela calcular a resposta do sistema a qualquer entrada, incluindo a entrada impulsional (impulso de Dirac, cuja Transformada de Laplace é simplesmnete1.

Com ela pode-se descrever matematicamente a composição de subsistemas. Por exemplo:

i) sistemas em série: produto das funções de transferência

ii) sistemas em paralelo: soma das funções de transferência

iii) sistemas com retroacção negativa

iv) sistemas com retroacção positiva

Esta forma de representação tem também sérias limitações.

A mais grave resulta do facto de só se poder aplicar a sistemas lineares.

Quando existem cancelamentos no seu cálculo, como vimos anteriormente, ela não é capaz de representar completamente todas as características relevantes do sistema; diz-se então que é uma representação **incompleta.**

Bibliografia

- Baura G. D, *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals, (Biomedical Engineering S.),* John Wiley and Sons, 2002
- Carvalho, J. L. M, *Sistemas de Controlo Automático.*. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- Chen, C.T. *Systems and Signals Analysis,* 2nd Ed, Saunders College Bupl, 1994
- Franlkin, G.F, J.D. Powell and Niemi, *Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1980.
- Khoo, Michael, *Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation* by; John Wiley and Sons, 1999.
- Murray, J.D., Mathematical Biology, 3rd Ed., Springer, 2002. https://www.pdfdrive.com/mathematical-biology-d41984249.html
- Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares,.,* IST Press 2002.

Capítulo 3 Apêndice

Transformada de Laplace

3A.1. Introdução

No capítulo 2 obtivemos equações diferenciais de diversas ordens, lineares ou não lineares, como modelos matemáticos de sistemas.

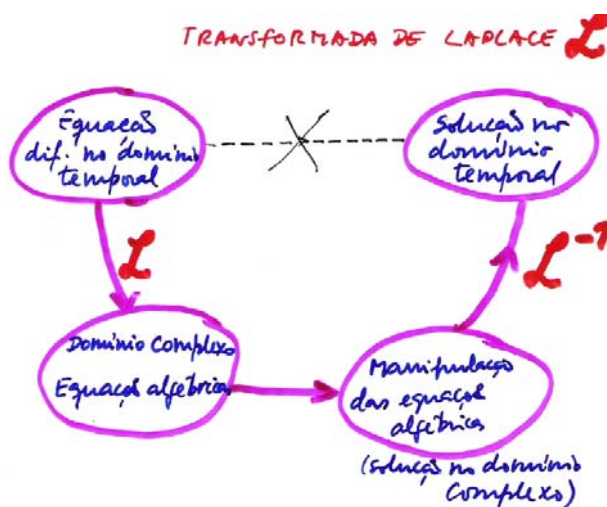
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

u → [ ] → y

Aplicando uma entrada u qualquer, qual o y obtido?

→ resolução da equação diferencial

Se as quisermos usar para prever o comportamento do sistema em determinadas situações, teremos que encontrar a solução dessas equações. No caso linear, para ordens baixas, poderemos encontrar uma solução analítica (pela técnica da solução geral mais uma solução particular, por exemplo); mas se a ordem for elevada esta técnica pode tornar-se de difícil aplicação. Também para sistemas de equações de 1ª ordem nem sempre é fácil aplicar esta técnica. Importa por isso uma técnica alternativa mais simples.

No caso linear a Transformada de Laplace cumpre com êxito esse objectivo. Tem além disso a vantagem adicional de, aplicada ao sistema, permitir exprimir facilmente importantes propriedades do sistema (dinâmicas, estabilidade, etc.) que são postas em evidência pelos parâmetros da própria transformada de Laplace.

Utilidade da Transformada de Laplace

No caso não-linear temos que recorrer a métodos numéricos para transformar as equações diferenciais em equações de diferenças e depois usar o computador para iterar. Trata-se dos métodos de integração numérica (rectangular, trapezoidal, Runge-Kutta, etc.) que estão implementados por muitos programas científicos, incluindo no MatLab/Simulink, como sabemos.

Por isso neste Apêncice iremos reveros elementos da Transformada de Laplace úteis neste contexto e a sua aplicação à resolução de equações diferenciais.

Consideraremos que todos os sinais temporais existem no intervalo [0, +∞], sendo nulos à esquerda de zero.

3A.2. Definição de transformada de Laplace (unilateral)

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida em $[0, +\infty[$ é dada por

$$F(s) \triangleq \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$s = \sigma + j\omega$ é operador de Laplace

Exemplo Seja $f(t) = e^{2t}$. Calcular $F(s)$

$$F(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t} \cdot dt = -\frac{1}{s-2} e^{-(s-2)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{s-2} \Big[e^{-(s-2)t} \Big|_{t=\infty} - \underbrace{e^{-(s-2)t} \Big|_{t=0}}_{=1,\ \forall s} \Big]$$

$$e^{-(s-2)t} = e^{-(\sigma + j\omega - 2)t} = e^{-(\sigma-2)t} \cdot e^{-j\omega t} =$$

$$= e^{-(\sigma-2)} \cdot (\cos \omega t - j \,\mathrm{sen}\, \omega t)$$

5A

$$e^{-(s-2)t}\Big|_{t=\infty} = e^{-(\sigma-2)t}\underbrace{(\cos \omega t - j \,\text{sen}\, \omega t)}_{\text{limitado mas podendo tomar } \forall \text{ valor em } [-1,1] \text{ com } t\to\infty}\Big|_{t=\infty}$$

$$e^{-(\sigma-2)t}\Big|_{t=\infty} = $$

i) se $\sigma < 2$: $e^{+\alpha.\infty} = \infty \quad (\alpha > 0)$

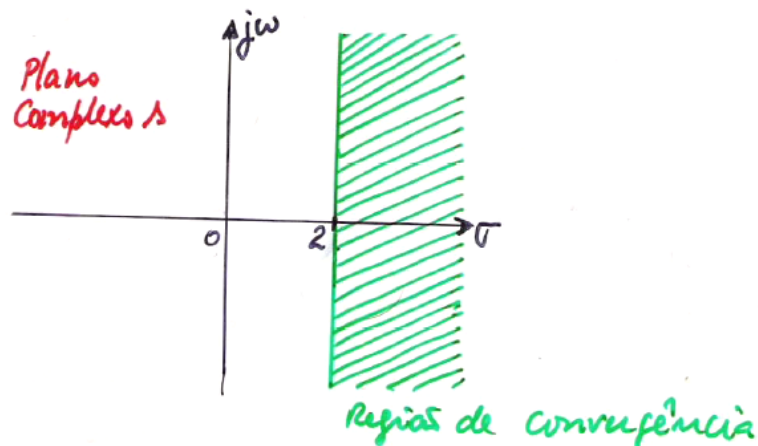
ii) se $\sigma = 2$: $e^{0.\infty}$ Indeterminado !

iii) $\sigma > 2$: $e^{-\alpha.\infty} = 0$

Considerando as duas partes em conjunto, conclui-se que

$$e^{-(s-2)t} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } \sigma < 2 \\ \text{indefinida}, & \text{se } \sigma = 2 \\ 0, & \text{se } \sigma > 2 \end{cases}$$

Portanto a transformada de Laplace de e^{2t} só é definida para $\sigma > 2$. Calculando-a

$$F(s) = \frac{-1}{s-2}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{s-2} \quad , \text{para } \sigma > 2$$

3A.3. Definição de transformada inversa de Laplace

Dada uma função F(s), a transformada de Laplace inversa é

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \triangleq \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st} \cdot ds \text{, para } t \geq 0$$

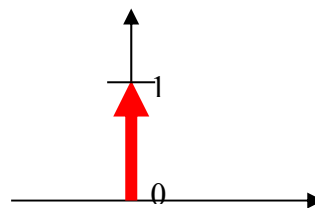
os limites do integral definem uma recta vertical no plano complexo cruzando o eixo real em $\sigma = c$, recta esta que tem que estar dentro da região de convergência. Se assim não for, $\mathcal{L}^{-1}$ dá resultados incorrectos.

Geralmente não se usa a definição para calcular f(t) a partir de F(s), como veremos. Por isso a região de convergência perde grande parte do seu interesse e não se tem normalmente em conta.

$$e^{2t} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s-2}$$

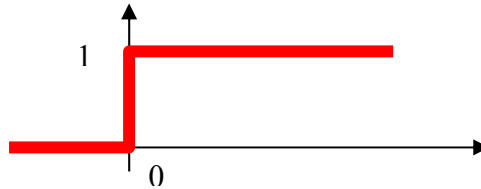
(definida em todos os pontos excepto $s=2$)

3A.4. Transformada de Laplace de funções elementares

Impulso de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} \neq 0, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$f(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

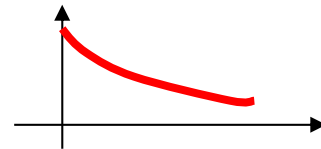
(todo o $\delta(t)$ está dentro dos limites de integração)

i) Degrau unitário

$$q(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$f(s) = \mathcal{L}[q(t)] = \int_0^{\infty} q(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-s\infty} - e^{-s0}\right] = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

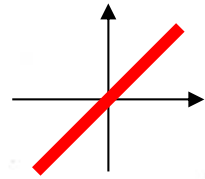
ii) Exponencial

Exponencial e^{-at}

$$f(s) = \mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} \cdot dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a) \cdot t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{-1}{s+a}[0-1]$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

Se a<0, a exponencial é crescente, tendendo para infinito.

iii) Rampa unitária

Para funções mais complicadas ver a Tabela de Transformada de Laplace.

3A.4. Propriedades da transformada de Laplace

i) Linearidade

$$f_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \qquad f_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha f_1(s) + \beta f_2(s) \quad , \alpha, \beta \text{ ctes}$$

ex. $\mathcal{L}[\cos \omega t] =$ $\qquad \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{+j\omega t}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} = \frac{1}{2}\frac{s-j\omega+s+j\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

da mesma forma, $\mathcal{L}[\operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

ii) derivação no domínio temporal

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \underbrace{s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - s^{n-3}\ddot{f}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}_{\text{nulo se } f(t)=0,\ t<0}$$

derivar no domínio temporal $\Leftrightarrow$ multiplicar por s no domínio complexo

$$\frac{d}{dt} \Leftrightarrow s$$

iii) integração no domínio temporal

Integração no domínio temporal – divisão por s no domínio complexo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\int_0^t \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

iv) deslocamento no domínio complexo

Deslocamento no domínio complexo – multiplicação por e^{-at} no domínio temporal

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\operatorname{sen}\omega t\right] = \mathcal{L}\left[\operatorname{sen}\omega t\right]\Big|_{s\to s+a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{+at}\cos\omega t\right] = \mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]_{s\to s-a}$$

$$= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$$

iv) Teorema do valor final

Este teorema relaciona no comportamento de f(t) no infinito com o comportamento de F(s) na origem

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

(se F(s) não tem polos no SPD)

v) Teorema do valor inicial

Relaciona o comportamento de f(t) na origem com o comportamento de F(s) no infinito.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

(se F(s) é estritamente própria)

vii) Convolução

Para calcular a convolução de duas funções, num intervalo de tempo [0,t], inverte-se no tempo uma delas, multiplicam-se uma pela outra e integra-se o produto, obtendo-se o integral de convolução. Num sistema linear, se calcularmos a convolução da resposta impulsional h(t) com uma entrada qualquer u(t), obtém-se a saída y(t) correspondente à entrada u(t), isto é,

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

O teorema da convolução da transformada de Laplace diz-nos que a transformada de Laplace da saída é o poduto da transformada de Laplace da resposta impulsional pela transformada de Laplace da entrada, se o sistema estiver relachado (com condições iniciais nulas),

$$Y(s) = H(s).U(s)$$

$H(s)$ → função de transferência (transfere a entrada para a saída).

$\delta(t)$ → [ ] → $h(t)$

$u(t)$ → [ ] → $y(t)$

$y(0) = 0$ (relaxado)

Veremos que H(s) se chama a função de transferência do sistema.

viii) deslocamento no domínio temporal

Deslocamento no domínio temporal – multiplicação por e^{-as} no domínio complexo

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

3A.5 Inversão da transformada de Laplace: expansão em fracções parciais.

Uma transformada de Laplace é em geral uma função racional, dada por

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$, função racional

$N(s)$: polinómio de s de coeficientes reais

$D(s)$: polinómio de s de " "

Diz-se que ela é:

$F(s)$ própria : grau $N(s) \le$ grau $D(s)$

$F(s)$ estritamente própria : grau $N(s) <$ grau $D(s)$

$F(s)$ biprópria : grau $N(s) =$ grau $D(s)$

$F(s)$ imprópria : grau $N(s) >$ grau $D(s)$

se $F(s)$ é própria o grau $F(s)$ é o grau de $D(s)$, por definição ($F(s)$ sem factores comuns no numerador e no denominador).

Se F(s) é própria, pode decompor-se numa soma de fracções simples, cujas transformadas são fáceis de calcular (consultando uma tabela, por exemplo).

$$F(s) = A_0 + A_1 f_1(s) + A_2 f_2(s) + \dots + A_m f_m(s)$$

$A_0 \triangleq$ constante real, nula se $F(s)$ é estritamente própria, e não nula se $F(s)$ for biprópria. $A_0 = F(\infty)$.

$f_1(s), \dots, f_m(s)$ entradas da tabela cujas transformadas são $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$.

$A_1, A_2, \dots, A_m$ são constantes reais.

Agora

$$f(t) = A_0 \delta(t) + A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + \dots + A_m f_m(t), \quad t \geq 0$$

Pode constatar-se que

$F(s)$ própria então —— $F(\infty) = 0$ ou constante

$F(s)$ estritamente própria —— $F(\infty) = 0$

$F(s)$ biprópria —— $F(\infty) \neq 0$, constante

$F(s)$ imprópria —— $F(\infty) = \pm\infty$

Definição de **pólos** e **zeros** fe F(s)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) e D(s) são polinómios **co-primos** (não têm raízes comuns) com coeficientes reais.

pólos: raízes da equação $D(s) = 0$

Como sabemos, uma equação de coeficientes reais pode ter raízes

- **reais simples**
- **reais múltiplas**
- **complexas aos pares conjugados (conjugadas)**

e por isso os pólos e zeros podem ter qualquer dessas formas.

Quando F(s) é própria, sendo N(s) e D(s) co-primos, o

Exemplo:

$$F(s) = \frac{2s^4 + s^3 - 2s}{s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8}\quad , \text{biprópria}$$

i) factorização do denominador

den = [1, 7, 18, 20, 8]; p = roots (den) Matlab

→ p = [1, 2, 2, 2]

$$s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8 = (s+1)(s+2)^3$$

(s+1): polo real simples; $(s+2)^3$: polo real de multiplicidade 3

$$F(s) = \frac{2s^4 + s^3 - 2s}{(s+1)(s+2)^3}$$

ii) decomposição em fracções parciais

$$F(s) = A.1 + A_1 \frac{1}{s+1} + A_2 \frac{1}{s+2} + A_3 \frac{1}{(s+2)^2} + A_4 \frac{2}{(s+2)^3}$$

todos estes termos existem na tabela

iii) inversa

$$f(t) = A_0\,\delta(t) + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + A_3\, t\, e^{-2t} + A_4\, t^2 e^{-2t}$$

como calcular A_0, A_1, A_2, A_3, A_4? → cálculo dos resíduos

O **cálculo dos resíduos** A_i depende do tipo de polo.

A_0 é fácil de calcular, bastando para isso substituir s por ∞ e levantar a indeterminação.

$$A_0 = F(\infty) = 2$$

A_1 corresponde a um polo simples (-1), e calcula-se por

$$-A_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2(-1)^4 + (-1)^3 - 2(-1)}{(-1+2)^3} = 3$$

O processo de cálculo facilita-se se fizermos a redução de F(s)

$$\begin{array}{l|l} F(s) = 2s^4 + s^3 + 0s^2 - 2s + 0 & s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8 \\ \quad -2s^4 - 14s^3 - 36s^2 - 40s - 16 & 2 \\ \hline \quad -13s^3 - 36s^2 - 42s - 16 & \end{array}$$

$$F(s) = 2 + \frac{-13s^3 - 36s^2 - 42s - 16}{s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8} = 2 - F_1(s)$$

E agora trabalharmos sobre $F_1(s)$, decompondo-a em fracções simples

$$F_1(s) = \frac{+13s^3 + 36s^2 + 42s + 16}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+2)^2} + \frac{A_4}{(s+2)^3}$$

(polo simples: $\frac{A_1}{s+1}$; polo múltiplo: $\frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+2)^2} + \frac{A_4}{(s+2)^3}$)

No caso de polos múltiplos, têm que se introduzir termos com denominadores com expoentes desde 1 até à multiplicidade da raiz (neste caso 3)

Agora, para cada um dos polos simples, faz-se

$$\frac{A_i}{s+p_i} \qquad A_i = (s+p_i)F(s)\Big|_{s=-p_i}$$

No caso de um polo múltiplo, é um pouco mais complicado.

polo múltiplo, multiplicidade n,

$$\frac{A_1}{s+p} + \frac{A_2}{(s+p)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s+p)^n}$$

$$A_n = (s+p)^n F(s)\Big|_{s=-p}$$

$$A_{n-1} = \frac{d}{ds}\left[(s+p)^n F(s)\right]\Big|_{s=-p}$$

$$\vdots$$

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s+p)^n F(s)\right]\Big|_{s=-p}$$

$$A_1 = \frac{13s^3+36s^2+42s+16}{(s+2)^3}\Big|_{s=-1} = \frac{\cdots}{(-1+2)^3} \cdots$$

$$A_4 = \frac{13s^3+36s^2+42s+16}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{13(-2)^3+36(-2)^2+42(-2)+16}{-2+1} = +28$$

$$A_3 = \frac{d}{ds}\left[\frac{13s^3+36s^2+42s+16}{s+1}\right]\Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{39s^2+72s+42\,(s+1)-(13s^3+36s^2+42s+16)}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2}$$

$$= -26$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{13s^3+36s^2+42s+16}{(s+1)}\right]\Bigg|_{s=-2} = 16$$

$$F(s) = 2 + 3\frac{1}{s+1} - 16\frac{1}{s+2} + 26\frac{1}{(s+2)^2} - 14\frac{2}{(s+2)^3}$$

e portanto

$$f(t) = 2\delta(t) + 3e^{-t} - 16e^{-2t} + 26te^{-2t} - 14t^2e^{-2t}$$

Caso de raízes complexas no denominador de F(s)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\text{polinómio de } s \text{ com coeficientes reais}}{\text{polinómio de } s \text{ com coeficientes reais}}$$

Como o polinómio denominador tem sempre coeficientes reais, as suas raízes, se foram complexas, têm que aparecer aos pares conjugados, isto é,

Se $p = \sigma + j\omega$ é raiz

então $p^* = \sigma - j\omega$ também o é

Exemplo (Chen, 166)

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{s}{(s+1)(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

polos: $p_1 = -1$
$p_2 = -1+2j$
$p_2^* = -1-2j$

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1-2j)} + \frac{A_3}{(s+1+2j)}$$

pode demonstrar-se que $A_3 = A_2^*$

esta decomposição não é conveniente porque obriga a trabalhar com resíduos complexos

$$(s+1+2j)(s+1-2j) = s^2+s-2sj+s+1-2j+2sj+2j+(-4)j^2$$
$$= s^2+2s+1+4 = (s+1)^2+2^2$$

em geral, $p = -a+jb$
$p^* = -a-jb$

$$(s-p)(s-p^*) = (s+a-jb)(s+a+jb)$$

$$= s^2+2as+a^2+b^2 = (s+a)^2+b^2$$

No exemplo

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)\left[(s+1)^2+2^2\right]} = \frac{A_1}{s+1} + \underbrace{\frac{A_2 s + A_3}{(s+1)^2+2^2}}_{\text{termo quadrático}}$$

Na tabela

$$e^{-at}\,\text{sen}\,\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\cos\omega t \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

é conveniente que os termos com denominador quadrático tenham esta forma

$$f(s) = A_1\frac{1}{s+1} + A_2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + A_3\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t}\cos 2t + A_3 e^{-t}\,\text{sen}\,2t$$

Falta agora calcular A_1, A_2, A_3:

- cálculo de A_1 (resíduo de um polo real simples)

$$A_1 = (s+1)f(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s}{(s+1)^2+2^2} = \frac{-1}{(-1+1)^2+2^2} = -\frac{1}{4}$$

– cálculo de A_2 e A_3

$$f(s) = \frac{s}{(s+1)^2\left[(s+1)^2+2^2\right]} = \frac{-1/4}{s+1} + \frac{A_2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{2A_3}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{\left[(s+1)^2+4\right](-1/4) + A_2(s+1)(s+1) + 2A_3(s+1)}{(s+1)\left[(s+1)^2+4\right]}$$

$$\Rightarrow (s^2+2s+5)(-1/4) + A_2(s^2+2s+1) + 2A_3(s+1) = s$$

$$\left(-\frac{1}{4}+A_2\right)s^2 + \left(-\frac{1}{2}+2A_2+2A_3\right)s + \left(-\frac{5}{4}+A_2+2A_3\right) = s$$

Igualando os coeficientes de iguais potências de s de ambos os lados da equação:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}+A_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}+2A_2+2A_3 = 1 \\ -\frac{5}{4}+A_2+2A_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 = 1/4 \\ A_3 = 1/2 \end{cases}$$

Invertendo,

$$f(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

obtém-se f(t).

3A.6. Aplicação da transformada de Laplace à resolução de equações diferenciais

Seja por exemplo a equação diferencial de 2ªordem

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=u$$

Aplicação de L a ambos os lados da equação:

i) $\mathcal{L}[a\ddot{y}+b\dot{y}+cy]=\mathcal{L}[u]$

ii) pela linearidade de $\mathcal{L}$

$$a\mathcal{L}[\ddot{y}]+b\mathcal{L}[\dot{y}]+c\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u]$$

iii) pelo teorema da derivação,

$$\mathcal{L}[\ddot{y}]=s^2\mathcal{L}[y]-s\,y(0)-\dot{y}(0)=s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}]=s\mathcal{L}[y]-y(0)=sY(s)-y(0)$$

$$\mathcal{L}[y]=Y(s)$$

Substituindo,

$$s^2aY(s)-s\,a\,y(0)-a\dot{y}(0)+sbY(s)-by(0)+cY(s)=U(s)$$

$$(as^2+bs+c)Y(s)=(as+b)y(0)+a\dot{y}(0)+U(s)$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{(as+b)y(0)+a\dot{y}(0)}{as^2+bs+c}}_{\text{saída devida às condições iniciais, } Y_{zi}}+\underbrace{\frac{U(s)}{as^2+bs+c}}_{\text{saída devida à entrada, } Y_{zs}}$$

Veremos o significado das duas parcelas de Y(s).

Bibliografia

- Bruce, Eugene, N, Biomedical Signal Processing and Signal Modelling, Jonh Wiley and Sons, 2001
- Chen, C.T. *Systems and Signals Analysis,* 2nd Ed, Saunders College Bupl, 1994

Tabela das Propriedades da Transformada de Laplace

Property	Time function	Laplace transform
Linearity	$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$
s-shifting	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time shifting	$f(t-T)q(t-T)$, for $T \geq 0$	$e^{-sT} F(s)$
s-differentiation	$tf(t)$	$\frac{-d}{ds} F(s)$
Time differentiation	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0-)$
	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0)$
Time integration	$\int_{0-}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Time scaling	$f(at)$, for $a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Convolution	$\int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$	$H(s)U(s)$
Final value	$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$	(if $sF(s)$ has no open RHP poles)
Initial value	$f(0+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$	(if $F(s)$ is strictly proper)

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1 or $q(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n (n: positive integer)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at} (a: real or complex)	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

CAPÍTULO 4

REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

4.1. Espaço de estados, variáveis de estado, equações de estado

Contrariamente à função de transferência, definida no domínio complexo, a representação no espaço de estados desenvolve-se no domínio temporal.

Exemplo 1 (Bruce):

Imagine-se um músculo de rã fixo por uma extremidade e no qual se suspende um corpo de massa M. O músculo, devido à sua elasticidade, alonga-se. Pode-se desenhar um equivalente mecânico de translação com uma mola K (elasticidade), atrito viscoso R, massa M, como já fizemos no Cap. 3.

A força aplicada à massa é a da gravidade e igual ao seu peso, F=Mg. Ou, se se desejar, pode-se-lhe aplicar uma força *u* (de distensão ou de compressão).

O atrito e a mola reagem com as forças

$$\text{atrito}: \ F_B = B\frac{dy}{dt} = B\dot{y}$$
$$\text{mola}: \ F_K = Ky$$

Fig. 4.1. Músculo da rã suspenso por uma extremidade (Bruce).

A força resultante é a soma das três e produz o deslocamento x

$$Mg - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y} \ \Rightarrow \ M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = Mg$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = g$$

Uma equação diferencial de segunda ordem, linear.

Pode-se reduzir a duas de 1ª ordem, por substituição de variáveis,

$$x_1 \triangleq y \qquad x_2 \triangleq \dot{y}$$

Agora

$$x_1 \triangleq y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$x_2 \triangleq \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{(\dot{y})} = \ddot{y} = -\frac{B}{M}\dot{y} - \frac{K}{M}y + \frac{1}{M}u$$
$$\text{ou seja} \quad \dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

Portanto

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

Ou ainda, mais simplesmente,

$$\dot{\mathrm{x}} = Ax + Bu$$

Exemplo 2

No modelo de inspiração-expiração pulmonar, definindo a **variável de estado** x_1 como o valor da pressão V_L, a entrada u como P(t) e a saída do sistema como o que queremos observar- o volume pulmonar, teremos

$$\dot{V}_L(t) + aV_L(t) = bP(t)$$

$$x_1 \triangleq V \qquad u \triangleq P(t)$$

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + bu$$

uma equação diferencial de 1ª ordem, linear, de coeficientes constante (por isso invariante), completa por haver uma entrada externa, $u(t)$. Deve ser escolhida como estado uma variável que seja capaz de exprimir a memória do sistema, em geral, como vimos no Capítulo 2, associada à quantidade de energia ou de massa armazenada. Neste caso essa variável é o volume pulmonar (associado à quantidade de ar).

Exemplo 3

No modelo de Lotka-Volterra que também vimos no Capítulo 2,

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

definindo as variáveis de estado x_1 e x_2 como o número de elementos de cada população (acumulação de massa), substituindo, simplificando a notação,

$x_1 \triangleq x$ (presas) $x_2 \triangleq y$ (predadores)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \qquad \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -cx_2(t) + px_1(t)x_2(t) \qquad \dot{x}_2 = -cx_1 + px_1x_2$$

obtêm-se duas **equações de estado**, invariantes (porque os seus coeficientes são constantes com o tempo). Não há entrada externa, neste caso, e por isso as equações são homogéneas. Com há produtos de variáveis de estado, as equações são não-lineares.

Se nos interessar observar a evolução das duas populações, diz-se que elas são as saídas do sistema (o que se vê do lado de fora), e assim

saída 1: $y_1 = x_1$
saída 2: $y_2 = x_2$

Exemplo 4. Metabolismo da glucose

O metabolismo da glucose (ou glicose) no sangue pode ser aproximado pelo modelo simplificado seguinte (Ackerman et al. (1969) (em Linkens))

$$\frac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + J(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = -m_3 h + m_4 g + K(t)$$

g : desvio do nível da glucose do seu valor recomendado
h : desvio do nível da insulina do seu valor recomendado
J : taxa experimental de infusão de glucose
K : taxa experimental de infusão de insulina
m_1, m_2, m_3, m_4, constantes características de cada indivíduo.

Podemos fazer o mesmo desenvolvimento para todos os exemplos que vimos. Por isso podemos generalizar, dizendo que a estrutura geral de um modelo de um sistema contínuo, independentemente da sua natureza, é constituída por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, com *m* entradas externas. Usando uma notação genérica, vem, para *n* variáveis de estado,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1(t),\ \dots\ ,\ x_n(t),\ u_1(t),\ \dots\ ,\ u_m(t),\ t) \qquad i\ =\ 1,\ \dots\ ,\ n$$

em que f_i são funções contínuas dos seus argumentos. As condições iniciais, necessárias para definir o estado inicial do sistema (a sua memória), serão,

$$x_i\ (t_0) = x_{i0},\quad i = 1, \dots , n$$

Teremos também um conjunto de *r* equações de saída (*r* saídas)

$$y_i\ (t)\ =\ g_i\ (x_1(t),\ \dots,\ x_n(t),\ u_1(t),\ \dots,\ u_m(t),\ t) \qquad i{=}1, \dots, r$$

em que as variáveis de saída medidas se exprimem em funções das *n* **variáveis de estado** do sistema e das *m* variáveis de **entrada.** Não há nenhuma relação geral obrigatória entre as dimensões dos vetores de estado, de entrada e de saída, mas na maior parte dos casos $n >> \text{máx}\ (m, r)$.

Se f_i ou g_i dependem explicitamente de *t*, para algum *i*, como por exemplo em

$$\dot{x}_1 = -2x_1 e^{-t} + 3u$$

diz-se um sistema variante. Quando tal não acontece, chama-se sistema invariante.

As funções f_i têm como argumentos apenas x_i, quando não existe qualquer entrada externa $u(t)$. Chamam-se neste caso sistemas **autónomos** (dependem apenas de si próprios).

Nas funções g_i é pouco frequente existirem entradas como argumentos: as entradas influenciam as saídas através dos estados, e não diretamente. As saídas são por isso em geral funções apenas dos estados. As saídas são, no fundo, o que queremos observar, medir, calcular, no sistema.

Em notação matricial poderemos escrever

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_r \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

(vetor de estado) (vetor de saída) (vetor de entrada) (vetor de estado inicial)

e os vetores de funções

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} \qquad g(x,u) = \begin{bmatrix} g_1 \\ . \\ . \\ . \\ g_r \end{bmatrix}$$

O modelo no espaço de estados é então definido por uma equação de estado (com condições iniciais) e uma equação de saída.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \quad x(t_0) = x0 \\ y &= g(x,u) \end{aligned}$$

Se as funções f_i e g_i são lineares e invariantes, teremos

$$f_i(x,u) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + ... + b_{im}u_m \quad , \quad i = 1,...,n$$

$$g_i(x,u) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + ... + c_{in}x_n + d_{i1}u_1 + ... + d_{im}u_m \quad , \quad i = 1,..., r$$

em que a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} e d_{ij} são coeficientes constantes.

Ou seja, a equação de estado toma a forma matricial

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

que se pode representar pelo diagrama de blocos da Fig. 4.2.

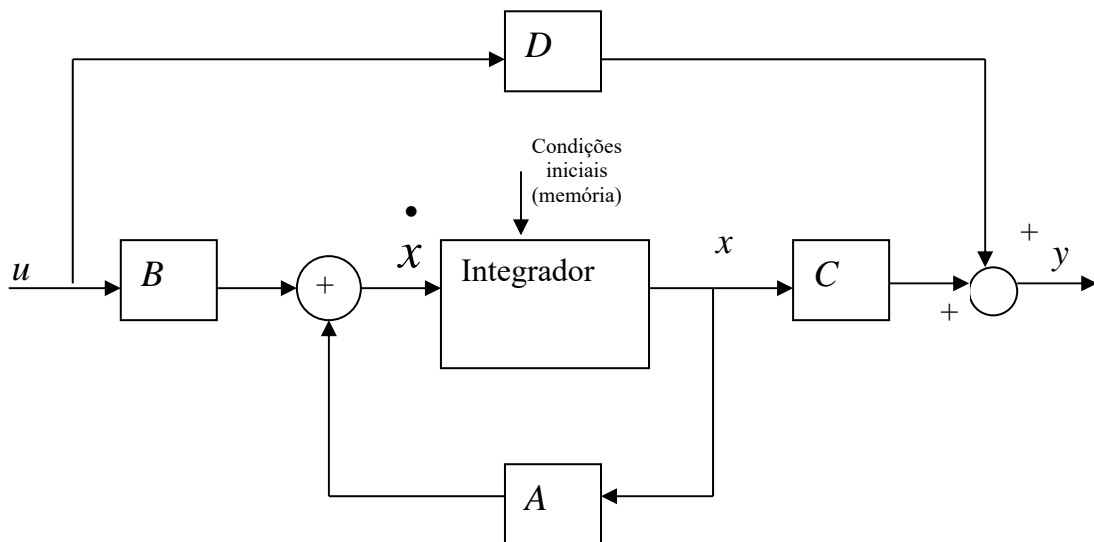



Figura 4.2.Diagrama de blocos da representação no espaço de estados. Normalmente D é nula.

As matrizes chamam-se

A = *n* x *n* **matriz de estado**

B = *n* x *m* **matriz de controlo**, ou de **entrada** ou de **comando**.

C = *r* x *n* **matriz de saída** (ou de **observação**)

D = *r* x *m* **matriz de avanço** ("feedforward")

u = **vetor de controlo**, ou de **entrada**, de dimensão *m*

y = **vetor de saída de dimensão** *r*

No caso SISO (*Single Iutput, Single Output*) B é um vetor coluna, que se pode anotar por b, e C é um vetor linha, anotada por c^T, D é um escalar d. Assim vem

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = c^T x + du$$

mas neste caso SISO também se pode utilizar a notação mais geral (A, B, C, D).

Se as matrizes A, B, C, ou D contêm elementos que variam com o tempo, diz-se um sistema variante (neste caso algum dos coeficientes a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ou d_{ij} variam com o tempo) e anotam-se por A(t), B(t), C(t), e D(t).

A matriz D exprime a influência instantânea das entradas sobre as saídas, ou seja, aquela influência que atua imediatamente e antes da devida à variação dos estados. Por isso se chama matriz de avanço. Na generalidade dos sistemas físicos, providos de inércia, esta influência instantânea é nula e, portanto, a matriz D é a matriz nula. Lembremo-nos, por exemplo, do efeito da posição do acelerador de um automóvel sobre a velocidade por ele atingida - o tempo de reação é sempre finito não nulo (a não ser que o automóvel possua um número infinito de cavalos...) não existindo por isso ação de avanço.

Definição 4.1

Estado. O estado de um sistema é uma estrutura matemática constituída por um conjunto de n variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, chamadas variáveis de estado, em que os valores iniciais $x_i(t_0)$ desse conjunto (i=1, … , n) e as entradas $u_j(t)$ (j=1, ... , m) para $t > t_0$ são suficientes para descrever univocamente a resposta futura do sistema. Existe um conjunto mínimo das variáveis de estado requerido para representar o sistema.

O instante inicial t_0 toma-se usualmente como a origem do tempo, t_0=0, mas pode ter um valor qualquer.

Definição 4.2

Vetor de estado (ou simplesmente estado). O conjunto das variáveis de estado $x_i(t)$, i = 1,... ,n representa os elementos ou componentes do vetor de estado $x(t)$ de dimensão n,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x$$

também chamado simplesmente **estado.**

Quando todas as entradas $u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, são especificadas para $t \geq t_0$, o vetor de estado resultante descreve univocamente o comportamento do sistema para $t > t_0$, dados os valores de $x(t_0)$.

Definição 4.3

Espaço de estados. O espaço de estados é o espaço X^n de dimensão n, subespaço de IR^n em cujos eixos de coordenadas se definem os componentes do vetor de estado. O estado $x(t)$, em qualquer instante t, é um ponto de IR^n.

Definição 4. 4

Trajetória de estado. Quando o estado varia com o tempo, chama-se trajetória de estado ao percurso (curva) por ele produzido no espaço de estados. Alguns autores chamam plano de fase ao espaço de estados bidimensional e trajetória de fase à trajetória de estado nesse caso (mais tarde veremos porquê).

Definição 4.5

Equação de estado. A equação de estado de um sistema é um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem, em que n é o número de variáveis de estado.

4.2. Escolha das variáveis de estado

A primeira etapa na aplicação destas definições a um sistema qualquer consiste na escolha das variáveis (do processo) que devem ser variáveis de estado. Deve notar-se que não existe um modo único de fazer essa escolha. Na prática existem várias escolhas possíveis, e teoricamente uma infinidade. Algumas escolhas têm interesse particular. Quando as variáveis de estado representam grandezas fisicamente mensuráveis e observáveis chamam-se variáveis físicas.

A escolha das variáveis de estado físicas (tal como se fez nos exemplos anteriores) baseia-se em geral nos elementos do sistema armazenadores de energia ou de massa. A tabela 4.1, já

estudada no Cap. 1, indica alguns elementos armazenadores de energia (mais comuns) existentes em sistemas físicos e as correspondentes equações energéticas.

A variável física da equação de energia de cada elemento armazenador pode ser escolhida como variável de estado do sistema. Em alguns sistemas pode ser necessário escolher outras variáveis para além das dos elementos armazenadores de energia.

Os elementos armazenadores de energia e de massa sintetizam toda a história passada do processo. De facto, sendo todos os fenómenos físicos transformações de energia e de massa, o estado atual da massa e de energia de um dado processo é o resultado de todo o que ele passou. Daí a pertinência desta forma de escolha das variáveis de estado.

Tabela 4.1. Elementos armazenadores de energia

Sistemas	Elementos	Energia	Variável
Elétrico	Condensador C	$\frac{Cv^2}{2}$	tensão v
	Indutância	$L\frac{i^2}{2}$	i
Mecânico	Massa M	$M\frac{w^2}{2}$	velocidade de translação w
	Momento de inércia J	$J\frac{w^2}{2}$	velocidade de rotação w
	Mola K	$K\frac{x^2}{2}$	deslocamento x
Fluídico	Gás Compressibilidade de um fluido V/K_B, K_B constante de Boltzman	$\frac{V}{K_B}\cdot\frac{P^2}{2}$	pressão P
	Líquido Capacidade de fluido C	$C\ \frac{h^2}{2}$	altura (nível) h
Térmico	Capacidade Térmica	$C\ \frac{\theta^2}{2}$	temperatura θ

4.3. Resolução da equação de estado linear

Dados

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \text{ , estado inicial} \\ u(t), t \geq 0 \text{ , entrada aplicada} \end{cases}$$

pode-se calcular $x(t)$, a trajectória de estado, resolvendo a equação de estado; isto é, $x(t)$ é a solução da equação de estado.

Para a variável de estado x_i teremos,

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t) + b_{i1}u_1(t) + \dots + b_{im}u_m(t)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}_i(t)] = \mathcal{L}[a_{i1}x_1(t) + \dots]$$

$$= a_{i1}\mathcal{L}[x_1(t)] + \dots + a_{in}\mathcal{L}[x_n(t)] + b_{i1}\mathcal{L}[u_1(t)] + \dots$$

Aplicando o teorema da derivação da Transformada de Laplace

$$sX_i(s) - x_i(0) = a_{i1}X_1(s) + \dots + a_{in}X_n(s) + b_{i1}U_1(s) + \dots + b_{im}U_m(s)$$

Fazendo o mesmo para todas as variáveis de estado, e escrevendo em forma matricial, vem, para a equação de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \mathcal{L}[\dot{x}] = A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u]$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

e para a equação de saída,

$$- \; y = Cx + Du \qquad \mathcal{L}[y] = C\mathcal{L}[x] + D\mathcal{L}[u]$$

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação de estado (propriedade da derivação),

$$s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$$s\,X(s) - A\,X(s) = x_0 + B\,U(s)$$

$$s\,I\,X(s) - A\,X(s) = x_0 + B\,U(s)$$

$$[sI - A]\,X(s) = x_0 + B\,U(s)$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1}x_0 + [sI-A]^{-1}B\,U(s)$$

X_{zi} : trajectória de entrada nula

X_{zs} : trajectória de estado inicial nulo.

obtém-se a solução no domínio complexo.

Substituindo X(s) na equação de saída,

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

$$Y(s) = C[sI-A]^{-1}x_0 + C[sI-A]^{-1}B\,U(s) + D\,U(s)$$

$$Y(s) = C[sI-A]^{-1}x_0 + \left[C[sI-A]^{-1}B + D\right]U(s)$$

Y_{zi} : resposta com entrada nula

Y_{zs} : resposta com condição inicial nula.

reencontramos aqui as duas partes da saída do Cap.3: a devida às condições iniciais e a devida à entrada.

Resposta com condições iniciais nulas:

$$Y(s) = \left[C\,[sI-A]^{-1}B + D\right]U(s)$$

Por outro lado, sabemos que

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

donde,

$$\boxed{G(s) = C\,[sI-A]^{-1}B + D}$$

!!! pode-se calcular a função de transferência da equação de estado (e de saída).

Exemplo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x_0 = [2 \;\; -1]^T$$

$$u(t) = 1,\ t \geq 0$$

$$y = [1 \;\; -1]\,x \qquad \text{calcular } y(t)$$

Calculando,

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$[sI-A]^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1}x_0 + [sI-A]^{-1}b\,\frac{1}{s}$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1}x_0 + [sI-A]^{-1}b\,\frac{1}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ -\frac{2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + [sI-A]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2+5s+1}{s(s+2)(s+1)} \\ \frac{-s-3}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} X(s) = \frac{3s^2+8s+1}{s(s+2)(s+1)} = \frac{0,5}{s} - \frac{1,5}{s+2} +$$

$$y(t) = 0,5 - 1,5\,e^{-2t} + 4\,e^{-t}, \quad t \geq 0$$

A função de transferência é dada por

$$G(s) = c^T [sI-A]^{-1} b + d$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ -\frac{2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1-s}{(s+2)(s+1)}$$

Aplicando uma entrada em degrau unitário 1/s,

$$Y(s) = \frac{-s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = 0{,}5 + 1{,}5\, e^{-2t} - 2\, e^{-t}$$

obtém-se uma saída diferente da anterior. Tal seria de esperar, dado que G(s) produz a saída para condições iniciais nulas e no caso anterior tínhamos condições iniciais iguais a $[2\ -1]^T$.

4.4. Solução da equação de estado no domínio temporal

Solução da equação de estado homogénea

Consideremos a equação de estado de um sistema linear, variante

$$\dot{x} = Ax + Bu\ .$$

A equação homogénea obtém-se fazendo u=0, de que resulta um sistema dito não forçado (também chamado autónomo),

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$x(t) = \int_0^t Ax(t)dt + x_0$$

Mas o integral é recorrente em x(t),

$$x(t)=\int_0^t Ax(t)dt+x_0=\int_0^t A(\int_0^t Ax(t)dt+x_0)dt+x_0=$$
$$=\int_0^t A(\int_0^t A(\int_0^t Ax(t)dt+x_0)dt+x_0)dt+x_0=....$$
$$=x_0+\int_0^t Ax_0dt+\int_0^t\int_0^t AAx_0dt+\int_0^t\int_0^t\int_0^t AAAx_0dt+...$$
$$=x_0+Ax_0\int_0^t dt+A^2x_0\int_0^t\int_0^t dt+A^3x_0\int_0^t\int_0^t\int_0^t dt+...$$
$$=x_0+Ax_0t+A^2x_0\frac{t^2}{2!}+A^3x_0\frac{t^3}{3!}+...+A^kx_0\frac{t^k}{k!}+...$$
$$=[1+At+A^2\frac{t^2}{2!}+A^3\frac{t^3}{3!}+...+A^k\frac{t^k}{k!}+...]x_0$$

Se compararmos esta última expressão com

$$e^{at}=1+\frac{at}{1!}+\frac{(at)^2}{2!}+...+\frac{(a.t)^k}{k!}+\dots$$

poderemos escrever, por analogia,

$$x(t)=e^{At}x(0)$$

e por isso e^{At} chama-se exponencial de matriz.

Note-se que a exponencial da matriz A não é composta pelas exponenciais dos elementos de A !

A exponencial de matriz chama-se **matriz de transição de estado**, $\Phi(t)$, podendo escrever-se

$$x(t)=\Phi(t)x(0)$$

Conhecida a condição inicial, para calcular o estado em qualquer instante futuro basta multiplicar o estado inicial pela matriz de transição de estado nesse instante; isto é, esta matriz transita o estado inicial para o instante *t*, e daí o seu nome.

Como calcular e^{At} ?

Computacionalmente poderemos calcular parcela a parcela,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + ... + A^k \frac{t^k}{k!} + ...$$

até que a parcela seguinte seja praticamente nula (se a série convergir …).

Mas seria interessante procurar outra solução, menos trabalhosa e (ouro sobre azul!) que pelo caminho nos permitisse também extrair algumas propriedades do sistema.

Essa solução existe, e baseia-se na estrutura própria da matriz. Como se sabe a estrutura própria da matriz é composta por

- valores próprios,
- vetores próprios à esquerda,
- vetores próprios à direita.

Considere-se novamente a equação homogénea

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Uma solução possível para este sistema é aquela em que $\dot{x}$ e x têm a mesma direção no espaço de estados, diferindo apenas na sua amplitude por um fator de proporcionalidade λ.

A solução será então de forma

$$\dot{x} = \lambda x$$

Substituindo acima, obtém-se

$$\lambda x = A x \quad <=> \quad [\lambda I - A]\, x=0$$

Se um valor de $x \neq 0$ satisfaz esta equação, é uma solução não trivial, e teremos necessariamente

$$Q(\lambda) = \det [\lambda I - A] = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$$

Sendo A de ordem n, $Q(\lambda)$ é o **polinómio característico de A** e a equação polinomial resultante de chama-se a **equação característica** de A e terá a forma

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

As raízes λ_i da equação característica chamam-se os **valores próprios** da matriz *A*. Uma raiz pode ser simples (distinta), ou repetida com uma multiplicidade p. Uma raiz pode ainda ser real ou complexa, aparecendo neste último caso sempre em pares conjugados (dado que os coeficientes da equação característica são reais). Quando as raízes são distintas, o polinómio Q(λ) pode escrever-se

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) ... (\lambda - \lambda_n)$$

O produto dos valores próprios de uma matriz *A*, sejam ou não distintos, é igual ao seu determinante. A sua soma é igual ao traço da matriz (soma dos elementos da diagonal principal).

Aos vetores *x* não nulos tais que

$$Ax = \lambda x$$

chamam-se **vetores próprios à direita** de *A*, porque multiplicam por *A* à direita.

Se os valores próprios são distintos, a cada um corresponde um vetor próprio, e os *n* vetores próprios assim obtidos são linearmente independentes.

Se existe um valor próprio de multiplicidade *p*, o número de vetores próprios a ele associados linearmente independentes varia entre 1 e *p*, dependendo das propriedades da matriz A.

Note-se que se *x* é vetor próprio, αx, $\alpha \in \mathbb{R}$, é-o também. Prova-se pela definição.

Chamam-se **vetores próprios à esquerda (ou recíprocos)** da matriz *A* os vetores w_i, (associados aos valores próprios λ_i, i = 1, ..., *n*) tais que (multiplicando à esquerda por *A*),

$$w_i^T A = \lambda_i w_i^T \quad \text{ou} \quad w_i^T [\lambda_i I - A]] = 0$$

Se w_i é um vetor próprio recíproco, também o é αw_i , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pode provar-se que a solução da equação de estado homogénea, usando a estrutura própria é dada por, no caso em que os valores próprios são todos distintos,

$$x(t) = \left[\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} . v_j \, w_j^T \right] . x(0)$$

$$= e^{\lambda_1 t} . v_1 \, w_1^T . x(0) + e^{\lambda_2 t} . v_2 \, w_2^T x(0). + ... + e^{\lambda_n t} . v_n \, w_n^T . x(0)$$

Este resultado é cheio de significado: ele diz-nos que a trajetória temporal do estado, para uma dada condição inicial, é uma soma ponderada de exponenciais dos valores próprios da matriz A (os termos $e^{\lambda_i t}$). São os vetores próprios que estabelecem os coeficientes de ponderação. Quer dizer que a estrutura própria da matriz é como que o código genético da dinâmica do sistema (autónomo).

O que acontece se um dos valores próprios da matriz de estado é positivo ? A sua exponencial tende para infinito com *t* e portanto a parcela respetiva também ! Logo a soma é infinita ! Isto é, o estado tende para infinito (pelo menos num dos seus componentes) e por isso o sistema é instável.

Reencontramos aqui a questão da **estabilidade às condições iniciais**, tal como no Capítulo 3. Os valores próprios de *A* são também chamados os **modos do sistema.** A esta solução da equação de estado chama-se **solução modal** por explicitar os modos.

Qual a relação entre estes modos e os que estudámos no Capítulo 3 ?

Pode-se demonstrar que são exatamente os mesmos! Isto é, o polinómio característico do Cap. 3 é o mesmo que o polinómio característico da matriz de estado. As raízes do polinómio característico são os valores próprios da matriz de estado.

Tudo o que se disse no Capítulo 3 sobre os modos se pode repetir aqui.

Solução da equação de estado completa

Agora temos

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e encontrar a solução não é tão simples.

Para isso considere-se a propriedade da derivação de matrizes variantes

$$\frac{d\left[M(t)N(t)\right]}{dt} = \dot{M}(t)N(t) + M(t)\dot{N}(t)$$

em que a derivada de uma matriz é a matriz constituída pelas derivadas dos elementos da matriz inicial, $\dot{M} = \left[\dot{m}_{ij}\right]$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}\left[\dot{x}(t) - Ax(t)\right]$$

mas como $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

integrando ambos os membros da equação

$$e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + k$$

Sendo k uma (matriz) constante de integração. Se substituirmos t = 0 na expressão

$$e^{-A0}x(0) = \int_0^0 e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + K \quad \Leftrightarrow \quad x(0) = K$$

Multiplicando ambos os lados por e^{At} e agrupando os termos, obteremos,

$$e^{At}e^{-At}x(t) = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + e^{At}x(0)$$

$$Ix(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = x_{zi} + x_{zc}$$

Pode constatar-se que x(t) é igual à soma de duas contribuições,

$$x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t)$$

uma devida às condições iniciais (*zi-zero input*) e outra devida à entrada (*zs-zero inicial state*).

4.5 Sistemas não-lineares, estados de equilíbrio e linearização

Muitos sistemas naturais, em particular os biológicos e fisiológicos, são de facto descritos por equações diferenciais não lineares. Coloca-se então a questão de aproximar as equações não lineares por equações lineares, se se pretender aplicar a teoria dos sistemas lineares. Chama-se **linearização** a essa operação e faz-se em torno dos estados de equilíbrio.

4.4.1 Estado de equilíbrio

Em muitas aplicações práticas as condições ideais de operação são caracterizadas por entradas, estados e saídas constantes no tempo. Suponhamos que o sistema é descrito pelo modelo não linear

$$\dot{x} = f(x, u)$$

A representação matemática de uma operação de linearização faz-se passando pela noção de ponto de equilíbrio ou estado permanente.

Definição 4.6

Estado de equilíbrio. O vetor x_S (n x 1) é um ponto de equilíbrio, estado de equilíbrio, ou estado permanente, correspondendo à entrada constante u(t) = u_S, se e só se,

$$f(x_s, u_s) = 0$$

A correspondente saída de equilíbrio ou saída de regime permanente é o vetor y_S (r x 1) tal que

$$y_s = g(x_s, u_s)$$

Exemplo 1

Seja o sistema definido pelas equações de estado e de saída

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 2u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$y = x_1 + 1/2\, x_2^2$$

Para calcular o estado de equilíbrio, aquele em que o estado não varia, faz-se

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_2 = 0 .$$

ou, equivalentemente, iguala-se a zero a parte direita

$$x_1 + x_2 - 2u = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$y = x_1 + 1/2\, x^2{}_2$$

e resolve-se em ordem a x_1 e x_2.

$$x_1 + x_2 - 2u = 0 \qquad 2x_1 = 2u_S \qquad x_1 = u_S \qquad x_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_S$$

$$x_1 = x_2 \qquad\qquad x_2 = u_S$$

$$y_S = u_S\,(1 + 1/2\, u_S)$$

Note-se que a cada valor de entrada $u = u_s$, corresponde apenas um valor de estado de equilíbrio; por exemplo para $u_S = 2$, $x_{1S}=2$, $x_{2S}=2$, $y_s=6$

Exemplo 2

Considere-se o caso seguinte e o cálculo dos seus estados de equilíbrio,

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 2u$$
$$\dot{x}_2 = x_2\,(x_1 - x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2u = 0\\ x_2\,(x_1 - x_2) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2u\\ x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = u\end{array}$$

verifica-se que tem dois estados de equilíbrio para cada valor u_S

$$x^1{}_S = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} u_S \qquad , \qquad x^2{}_S = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} u_S$$

Dado um u_S, qual o estado de equilíbrio que se obtém, $x^1{}_S$ ou $x^2{}_S$?

Depende das condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$. Podemos simular no Matlab o que acontece. O programa PPLANE8 (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane) faz o seguinte: dado o valor de u, para cada valor de $x_1(0)$ e $x_2(0)$ integra as duas equações de estado, calculando assim as trajetórias $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Fazendo isso para um grande número de valores das condições iniciais, obtém-se a figura, no caso de u=1, chamada curvas de fase (Phase-Plane, PPlane). O programa aceita duas variáveis de estado, x e y.

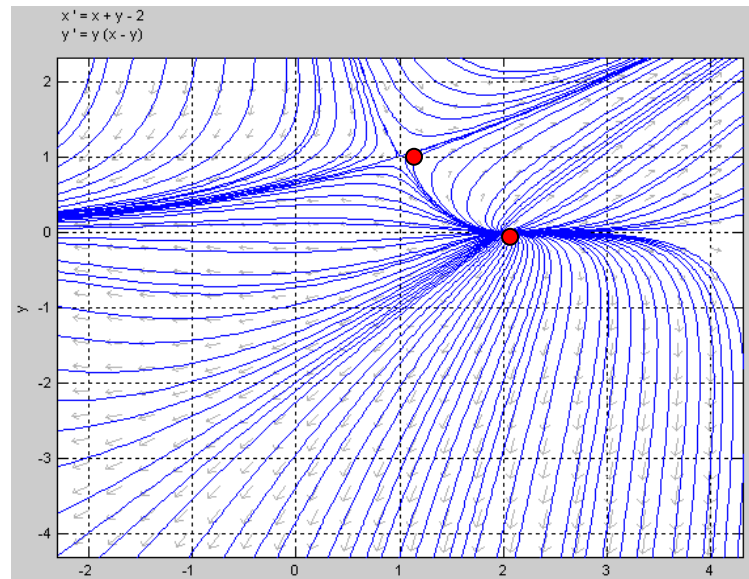



Figura 4.3. Exemplo 2, Curvas de fase. As setas indicam o sentido de progressão da trajetória. A notação é $x = x_1$, $y=x_2$; note-se que aqui y não é necessariamente a saída do sistema.

Existe também uma versão Java para o pplane em https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/

Exemplo 3

Seja

$$\dot{x}_1 = x_1 + u\,x_2 \qquad x_1 + u\,x_2 = 0 \qquad x_2(u-1) = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ou } u-1=0$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 \qquad x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2$$

Agora temos duas situações, conforme o valor de *u*,

i) $u \neq 1\,,\ x_2 = x_1 = 0,\ x_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u = 1, \quad x_2$ qualquer e $x_1 = -x_2 \qquad x_S = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in |R$

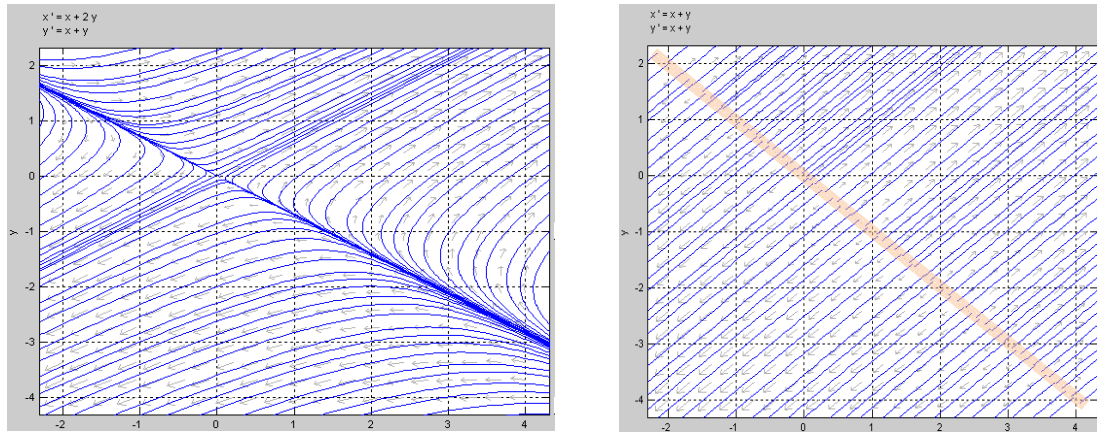
Assim para *u*=1 existe uma infinidade de pontos de equilíbrio. As condições iniciais determinam qual o obtido.

u =2 u=1

Figura 4.4. Exemplo , curvas de fase. Para u=2 a origem é o único ponto singular (instável). Para u=1 todos os pontos situados na reta a sombreado são singularidades instáveis.

Exemplo 4

Para o caso seguinte

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 \qquad\qquad x_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 1 + (x_1 - x_2)u + x_1^2 \qquad 1 + 0u + x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm j \text{ (imaginário)}$$

Se o sistema for real a solução obtida corresponde à inexistência de estados de equilíbrio.

Exemplo 5

No caso geral linear,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow Ax + Bu = 0 \Rightarrow Ax_s = -Bu_s$$

e dois casos se podem dar:

a) A é não singular, solução única $x_S = - A^{-1} B\, u_S$

b) A é singular: não existe solução ou existe um número infinito de soluções.

Por exemplo, no caso seguinte,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u$$

de estado de equilíbrio, para um dado u_S será

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_S + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u_S = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u_S$$

se $$u_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

não existe solução possível.

Se $$u_S = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

existe um número infinito de estados de equilíbrio definidas por

$$x_{1S} - x_{2S} = 1/2 \ .$$

Note-se que quando existe uma solução x_S, a singularidade de A quer dizer que tem um (pelo menos) valor próprio nulo e portanto um vetor não nulo satisfazendo $Aw = 0$. Então $A(x_S + \lambda w) = Ax_S + \lambda Aw = Ax_S = -Bu_S$. Quer dizer que e $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_S + \lambda w$ é também um regime permanente e portanto o número de estados de equilíbrio é infinito.

4. 4.2. Métodos de linearização: aproximação pela Série de Taylor

O processo de linearização (de um modelo) de equações não lineares na vizinhança de um estado de equilíbrio definido pelo tripleto x_S, u_S, y_S, consiste na aproximação dos vetores de funções f e g por funções lineares, na vizinhança desse ponto de equilíbrio,

Linearização pela Série de Taylor

A linearização analítica baseia-se na aproximação das funções f_i e g_i por uma **série de Taylor** (na vizinhança dos pontos de equilíbrio), sendo Δx_i e Δu_i os desvios em relação ao estado de equilíbrio.

$$f_i(x_{1s}+\Delta x_1, x_{2s}+\Delta x_2, ...+x_{ns}+\Delta x_n, u_{1s}+\Delta x_1, u_{2s}+\Delta u_2, ..., u_{ms}+\Delta u_m) =$$
$$f_i(x_{1s}, x_{2s}, ...+x_{ns}, u_{1s}, u_{2s}, ..., u_{ms}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\Delta u_k$$
+ termos de ordem superior

Para as funções de saída, de igual modo

$$g_i(x_{1s}+\Delta x_1, x_{2s}+\Delta x_2, ...+x_{ns}+\Delta x_n, u_{1s}+\Delta x_1, u_{2s}+\Delta u_2, ..., u_{ms}+\Delta u_m) =$$
$$g_i(x_{1s}, x_{2s}, ...+x_{ns}, u_{1s}, u_{2s}, ..., u_{ms}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial u_k}\Delta u_k$$
+ termos de ordem superior

Desprezando os termos de ordem superior e considerando,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = F_X{}^T \text{ calculada em } x_s, u_s \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ ... & ... & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} = F_u{}^T \text{ calculada em } x_s, u_s$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} = G_X{}^T \text{ calculada em } x_s, u_s \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ ... & ... & \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix} = G_U{}^T \text{ calculada em } x_s, u_s$$

A notação $F_x{}^T$ simplifica a compreensão da matriz: os índices de *x* evoluem por linha, e uma linha é a transposta de um vetor (neste caso *x*). O mesmo se aplica para as outras.

As matrizes das primeiras derivadas das funções em ordem a cada um dos seus argumentos chamam-se Jacobianos.

Substituindo na série de Taylor truncada na 1ª ordem obtém-se um modelo linear

$$\dot{x}_s = f(x_s, u_s) \qquad y_s = g(x_s, u_s)$$
$$(\dot{x}_s + \dot{\Delta x}) = f(x_s + \Delta x, u_s + \Delta u) \qquad y_s + \Delta y = g(x_s + \Delta x, u_s + \Delta u)$$
$$\dot{x}_s + \dot{\Delta x} = f(x_s, u_s) + A\Delta x + B\Delta u \qquad y_s + \Delta y = g(x_s, u_s) + C\Delta x + D\Delta u$$

Como $\dot{x}_s = f(x_s, u_s)$ e $y_s = g(x_s, u_s)$ da expressão acima resulta a equação de estado e de saída na forma padrão

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \end{aligned}$$

cuja validade só pode ser afirmada quando são desprezáveis os termos de ordem superior a 1 da série de Taylor, i. e., quando são pequenos os desvios do regime permanente. Para simplificar a notação, poderemos representar o sistema linearizado eliminando os Δ, e tendo sempre presente que as variáveis (de estado, de entrada, de saída) representam desvios do regime permanente. As matrizes A, B, C, e D são os Jacobianos de *f* e *g* (em ordem a x e a *u*).

Exemplo 5.**P**ode-se verificar por substituição que o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_1 - 1)^2 + x_2 + x_3 - 2u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + x_1 x^2 - u_1^2 - u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - x_3 - u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1(1 + x_2) + u_1 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - u_2 \end{aligned}$$

para $u_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem um ponto de equilíbrio em $x_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Linearizando em torno desse ponto obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Será esse estado de equilíbrio estável ?

Calculando os valores próprios de A, no Matlab

```
>> A=[0 1 1;3 1 0;1 1 -1]

A =

    0    1    1

    3    1    0

    1    1   -1
```

```
>> v=eig(A)

v =

   2.6274

  -1.3137 + 0.4211i

  -1.3137 - 0.4211i
```

conclui-se que é instável, dado que um dos valores próprios tem parte real positiva. O que acontece quando uma trajetória se aproxima dele ? Veremos no Cap.5.

Conclusão

Neste capítulo estudámos alguns elementos sobre o espaço de estados, uma representação temporal de um sistema. Aplica-se de igual modo aos sistemas lineares e não lineares, variantes ou invariantes.

No caso linear obtém-se uma representação matricial. As propriedades dinâmicas do sistema são dependentes dos valores próprios da matriz de estado, tal como são dependentes dos polos da função de transferência na representação no domínio complexo.

Os sistemas não-lineares podem ter zero, um ou vários estados de equilíbrio para a mesma entrada. Alcançam um ou outro conforme as condições iniciais.

Aproximando as funções de estado e de saída pela série de Taylor, desprezando os termos de ordem superior à primeira, obtém-se um sistema linear.

Bibliografia

Baura G. D, *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals, (Biomedical Engineering S.),* John Wiley and Sons, 2002

Bruce, E., *Biomedical Signal Processing and Signal Modeling.*

Carvalho, J. L. M*, Sistemas de Controlo Automático.*. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

Chen, C.T. *Systems and Signals Analysis,* 2nd Ed, Saunders College Publ., 1994

Franklin, G.F, J.D. Powell and Niemi, *Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1980.

Khoo, Michael, *Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation* by; John Wiley and Sons, 2000.

Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares,* IST Press 2002.

CAPÍTULO 5

(documento de trabalho)

COMPORTAMENTO DOS SISTEMAS NÃO-LINEARES E SISTEMAS CAÓTICOS

5.1. Pontos singulares nos sistemas não-lineares

Os pontos singulares num sistema são aqueles em que se anulam as derivadas das variáveis de estado. Chamámo-los pontos de equilíbrio no Cap. 4 e por vezes também se chamam regime permanente; quanto o ponto singular é estável, estas denominações fazem sentido. Caso contrário é mais sugestivo chamar-lhe ponto singular, dado que as trajetórias não acabam neles, mas são por eles repelidas.

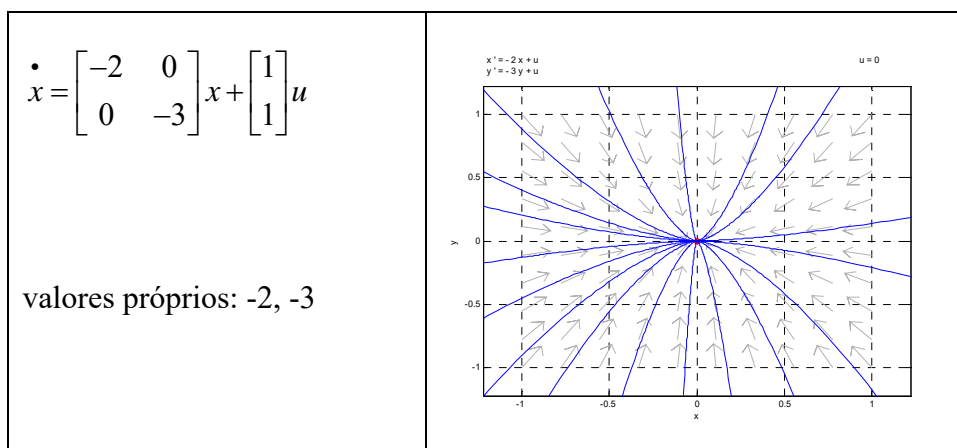
5.1.1 Análise no caso linear

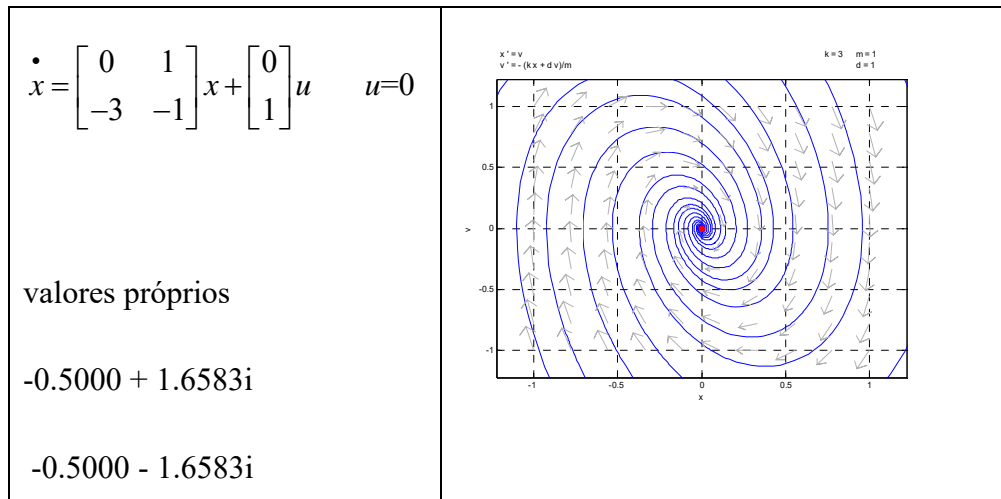
Um sistema linear, salvo para a situação particular em que *det(A)=0*, tem uma só singularidade. Se a entrada for nula, ela será a origem. Vamos considerar este caso, sem perda de generalidade (como sabemos no caso linear a entrada desloca a singularidade no espaço, mas não altera a sua natureza). A estabilidade do sistema é dada pelos valores próprios da matriz de estado.

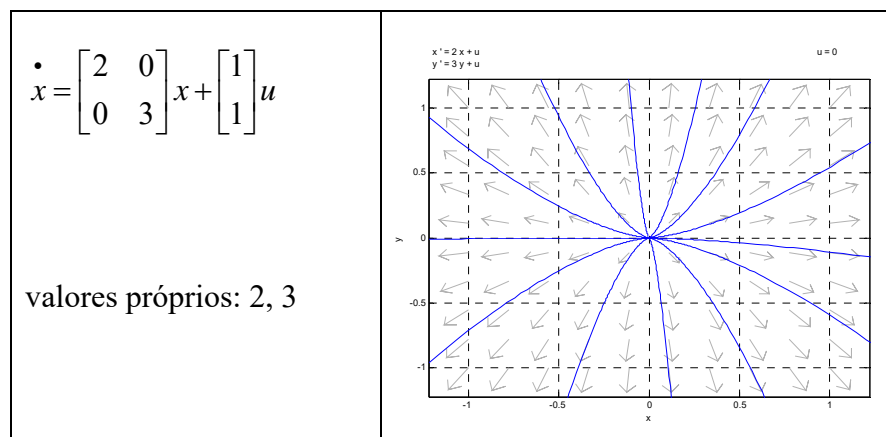
Há vários tipos de singularidades, umas instáveis, outras estáveis.

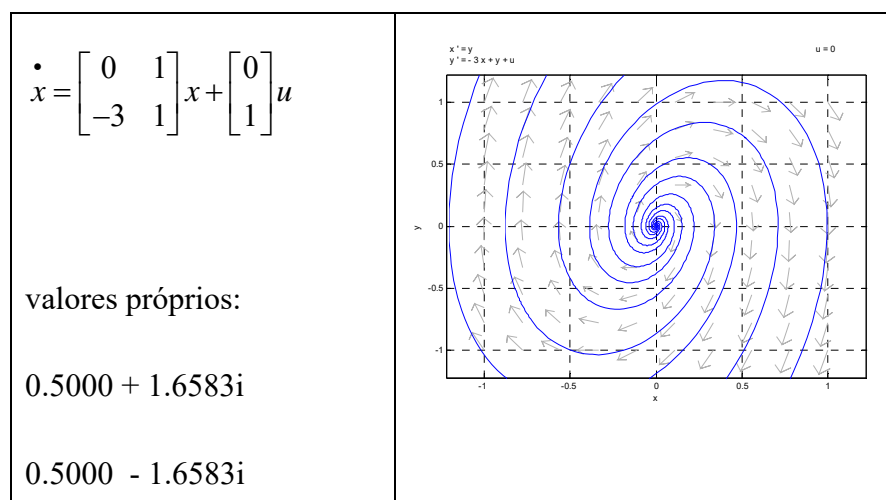
Vejamos um exemplo de cada tipo.

i) **Nó estável (poço-*sink, attractor*)**: quando os valores próprios de A são negativos e distintos. A trajetória tende para o nó sem oscilações.

$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ valores próprios: -2, -3	x' = -2 x + u y' = -3 y + u u = 0

ii) **Foco estável (poço-*sink, atractor*):** quando as raízes são complexas conjugadas com partes reais negativas. A trajetória tende para o foco oscilando.

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u=0$ valores próprios -0.5000 + 1.6583i -0.5000 - 1.6583i	

iii) **Nó instável (fonte-*source, repelling*)**: ambos os valores próprios são reais positivos. A trajetória é repelida, sem oscilações

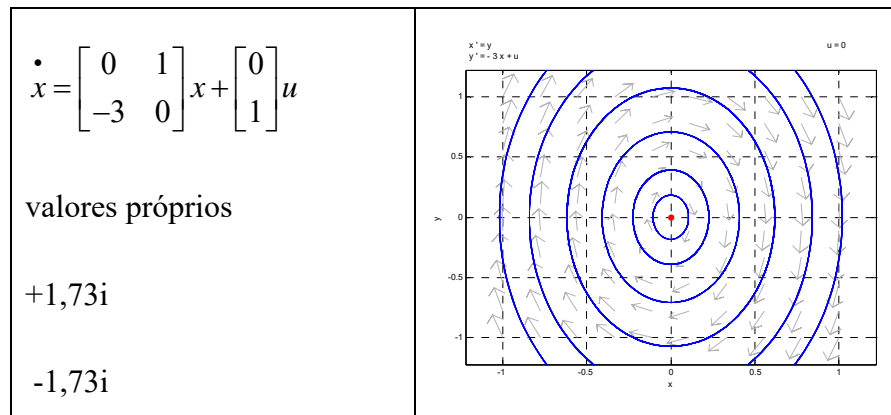
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ valores próprios: 2, 3	

iv) **Foco instável (fonte-*source, repelling*)**: quando as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva. A trajetória é repelida com oscilações.

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ valores próprios: 0.5000 + 1.6583i 0.5000 - 1.6583i	

v) **Centro**: quando os valores próprios são ambos imaginários. A trajetória move-se em torno do centro descrevendo uma curva fechada. O raio da curva depende das condições iniciais.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

valores próprios

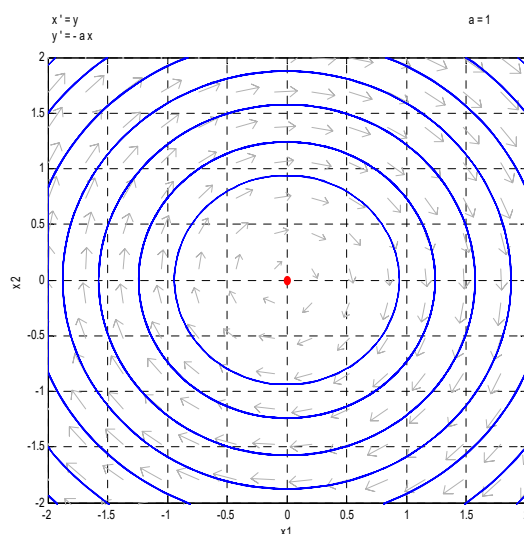
+1,73i

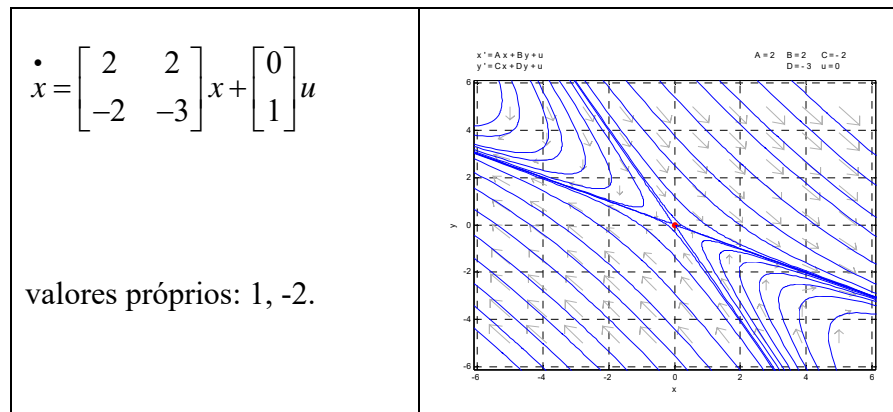
-1,73i

Um **oscilador linear** tem a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt} + ay = 0$$

em que a é uma constante positiva. Escolhendo as variáveis de estado $x_1=y$ e $x_2=dy/dt$, vem,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a.x_1$$

cujo plano de fase é

semelhante ao anterior, que é um oscilador com $a=3$ (atente-se na matriz de estado).

vi) **Ponto sela**: quando um dos valores próprios é positivo e o outro é negativo.

Chama-se ponto sela porque se cortarmos uma sela de cavalo transversalmente obtemos uma curva sem ponto de estacionaridade. Se a cortarmos transversalmente obtemos uma curva com um ponto de estacionaridade. Um ponto sela atrai a trajetória até certo ponto (efeito do valor próprio negativo, mas depois repele-a, efeito do valor próprio positivo). No ponto sela não passa nenhuma trajetória, embora apossamos aproximar tanto quanto quisermos, através das condições iniciais.

5.1.2 Sistemas não lineares: várias singularidades possíveis e estabilidade local

Exemplo: Modelo de Lotka-Volterra

$x_1 \triangleq x$ (presas) $\qquad x_2 \triangleq y$ (predadores)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \qquad \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -cx_2(t) + px_1(t)x_2(t) \qquad \dot{x}_2 = -cx_1 + px_1x_2$$

Calculando os pontos singulares, obtém-se

$$0 = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t)$$
$$0 = -cx_2(t) + px_1(t)x_2(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a - bx_2(t)]x_1(t) = 0 \wedge x_1(t) \neq 0 \\ [-c + px_1(t)]x_2(t) = 0 \wedge x_2(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [a - bx_2(t)] = 0 \\ [-c + px_1(t)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = \dfrac{a}{b} \\ x_1(t) = \dfrac{c}{p} \end{cases}$$

outro ponto singular: $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = 0$

Linearizando as equações de estado obtém-se o Jacobiano

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ px_2 & -c + px_1 \end{bmatrix}_{[\frac{c}{p}, \frac{a}{b}]} = \begin{bmatrix} a - b\frac{a}{b} & -b\frac{c}{p} \\ p\frac{a}{b} & -c + p\frac{c}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b\frac{c}{p} \\ p\frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

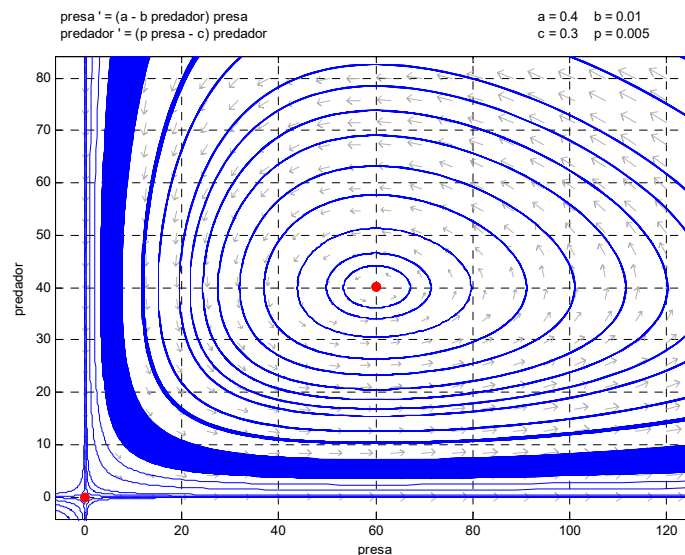
calculando os valores próprios de A, o seu polinómio característico é

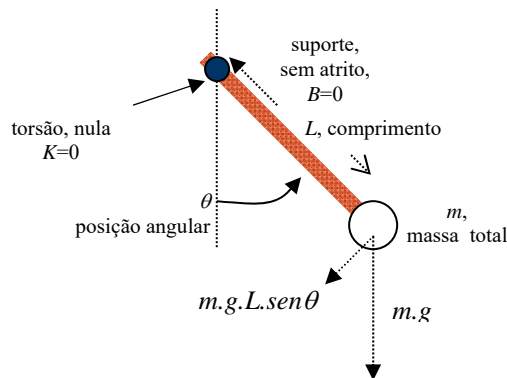
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & +b\frac{c}{p} \\ -p\frac{a}{b} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + pb\frac{a}{b}\frac{c}{p} = \lambda^2 + ac$$

cujas raízes são:

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \pm j\sqrt{ac}$$

Para uma dada população inicial de cada espécie, qual será a evolução delas? A singularidade é um centro (porquê?).

Usando o PPLANE8 obtém-se as curvas de fase seguintes.

São bem visíveis os dois pontos singulares: um ponto sela (a origem, valores próprios 0,4 e -0,3) e um centro (valores próprios +0,3464i e -0,3464i). A mancha representa trajetórias muito próximas, já na bacia de atração da origem.

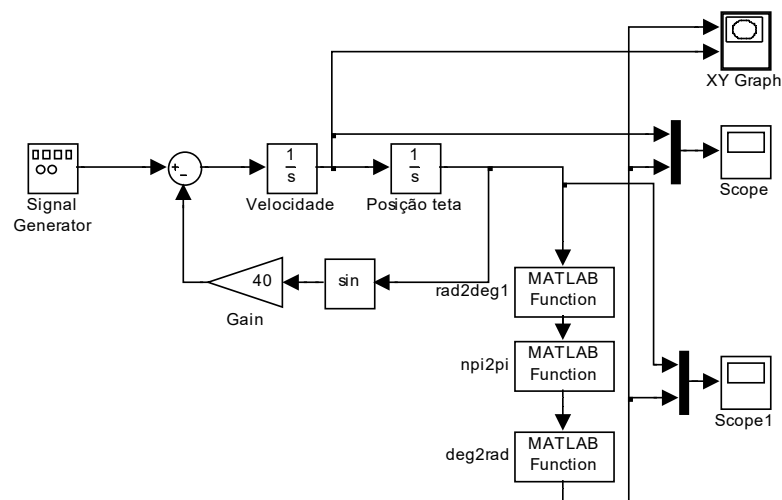
Exemplo: O pêndulo rígido (Khoo, 236))

Um pêndulo rígido é composto por um disco metálico pesado suspenso por uma corda (considerada sem peso) a um ponto de fixação vertical. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento do pêndulo na direção tangencial ao disco (sistema mecânico de rotação, J ≡ m), obtém-se

$$J.aceleração = binário$$

$$J\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgLsen\theta\ , \quad J = mL^2 \text{ é o momento de inércia}$$

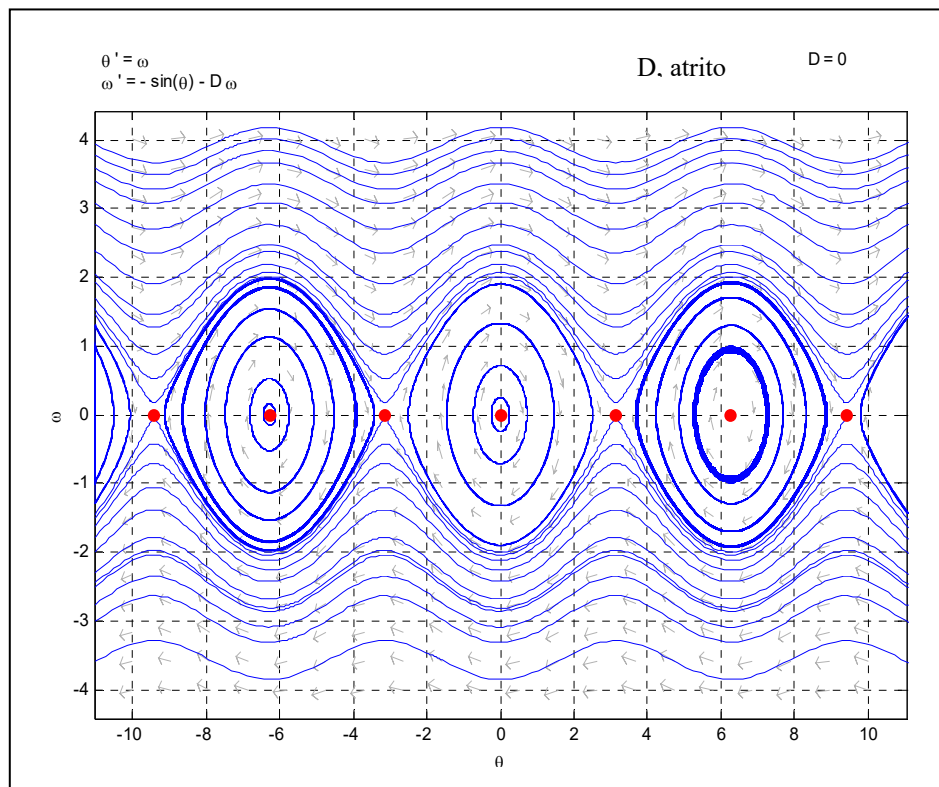
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{mL^2}\times sen\theta = -k\times sen\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\times sen\theta = 0 \qquad k = \frac{g}{L}$$

Pode-se implementar em Simulink e observar o seu comportamento.

Quando o pêndulo inicia o movimento numa posição inferior a 180º com velocidade nula, verifica-se o movimento pendular normal (oscilatório). Se a velocidade inicial é não nula e se a posição inicial for próxima de π (por exemplo 0,99π) o pêndulo gira sempre no mesmo sentido, passando pela posição superior e continuando.

Escolhendo as variáveis de estado x_1=θ e x_2 = ω teremos

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -k.sen x_1$$

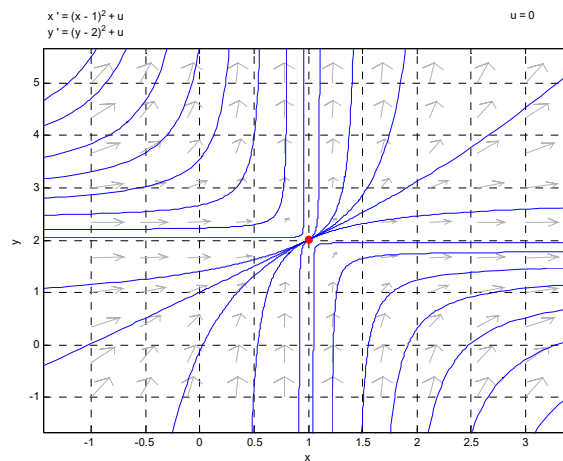
Com o PPLANE8 pode ver-se que existem muitas singularidades devido à posição angular cíclica com 2π (na figura k=1).

As singularidades são de dois tipos: centros e pontos sela. Os centros correspondem ao movimento pendular e têm as coordenadas da posição vertical inferior; as selas correspondem ao movimento circular e têm as coordenadas da posição vertical superior.

Exemplo com 4 singularidades

$$\dot{x}_1 = (x_1 -1)^2 - u \qquad y = x_2$$
$$\dot{x}_2 = (x_2 - 2)^2 - u$$

i) $u=0$

$$0 = (x_{1S} - 1)^2 \Rightarrow x_{1S} = 1$$
$$0 = (x_{2S} - 2)^2 \Rightarrow x_{2S} = 2$$

Tem uma só singularidade, o ponto $[1 \quad 2]^T$. O Jacobiano é aí a matriz nula. Há por isso dois valores próprios na origem e o sistema é instável (isto é, o sistema linearizado em torno da origem tem dois valores próprios na origem). Traçando as curvas de fase (figura seguinte), obtém-se um comportamento estranho: as trajetórias do 3º quadrante são atraídas para o ponto singular e depois repelidas para o 1º quadrante. As do 2º e 4º quadrantes comportam-se como se a origem fosse um ponto sela.

u=1

$$(x_1 - 1)^2 - u = 0 \quad \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = u \Leftrightarrow (x_1 - 1) = \pm\sqrt{u}$$
$$(x_2 - 2)^2 - u = 0 \quad \Leftrightarrow (x_2 - 2)^2 = u \Leftrightarrow (x_2 - 2) = \pm\sqrt{u}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1) = \pm\sqrt{u} \Leftrightarrow x_{1S} = 1 \pm \sqrt{u_S}$$
$$\Leftrightarrow (x_2 - 2) = \pm\sqrt{u} \Leftrightarrow x_{2S} = 2 \pm \sqrt{u_S}$$

$$u_S = 1 \Leftrightarrow x_S^1 = [2,3]^T$$
$$x_S^2 = [0,1]^T$$

$u_S = 1$: quatro singularidades distintas

$$x_S^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_S^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_S^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_S^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

nó instável — ponto sela — ponto sela — nó estável

As curvas de fase estão traçadas na figura ao lado.

Qual o estado alcançado, a partir de uma dada condição inicial ?

O que acontece nas regiões de fronteira ?

Note-se também que neste caso, não linear, a introdução de uma entrada exógena *u* altera qualitativamente o número e o tipo de singularidades.

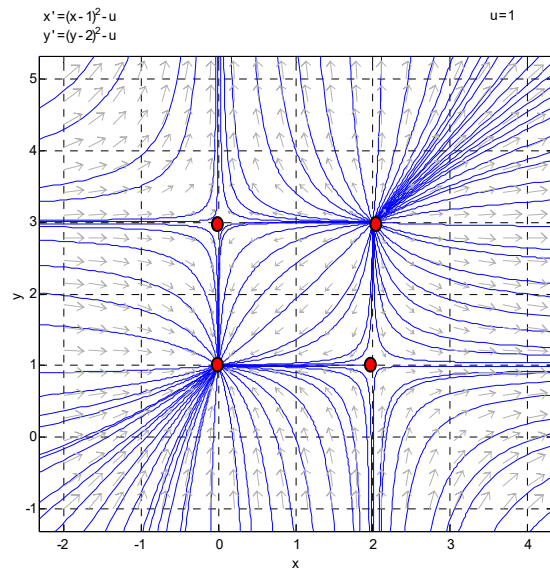
Qual a estabilidade do sistema não-linear ?

Aqui temos que introduzir a noção de **estabilidade local,** diferente da **estabilidade global.**

Qual a estabilidade local do sistema (na vizinhança de cada singularidade)?

Depende da singularidade. Neste caso temos um nó estável, um nó instável e dois pontos sela. Graficamente é fácil de se concluir sobre a natureza de qualquer um deles.

Para se estudar analiticamente da estabilidade de cada singularidade procede-se do seguinte modo:

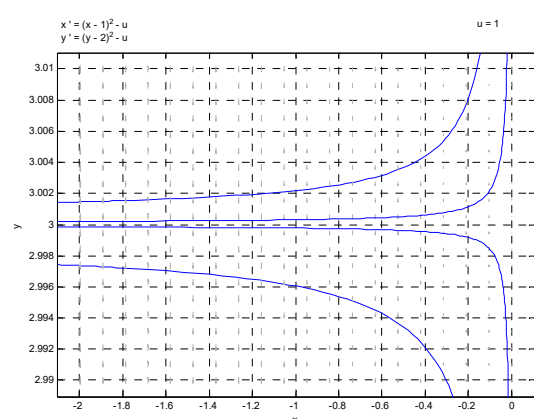
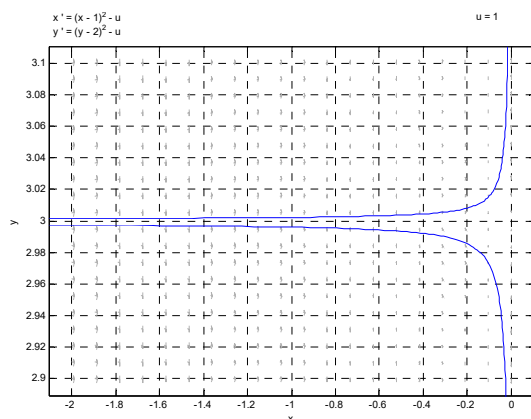
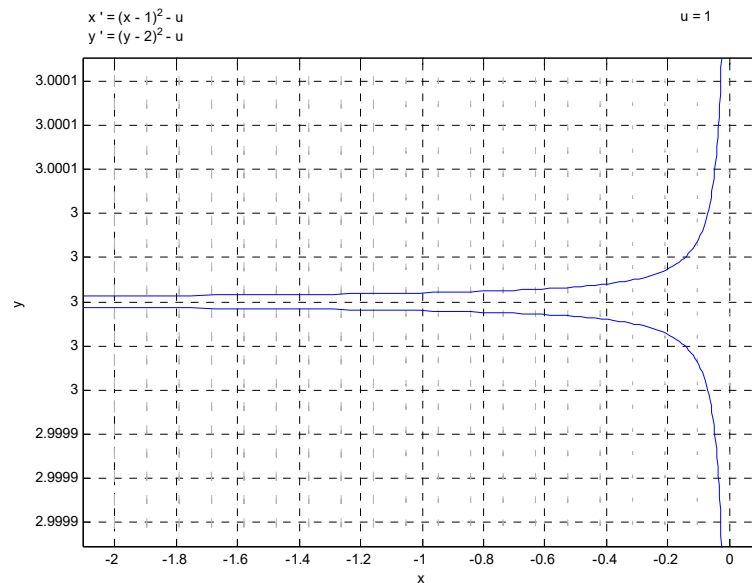
-lineariza-se o sistema não linear em torno da singularidade (calculam-se os Jacobianos nas singularidades),

- calculam-se os valores próprios da matriz de estado obtida em cada caso. A estabilidade do sistema linear obtida é a estabilidade do sistema não-linear na vizinhança da singularidade (note-se que a linearização só é válida numa vizinhança da singularidade).

Definição. Sistema localmente estável: um sistema diz-se localmente estável (na vizinhança de uma singularidade) se, afastado da singularidade por uma perturbação, a ela regressa por si próprio.

Acontece quando a singularidade é um nó estável ou um foco estável. Não acontece no caso de um nó instável ou de um foco instável. Para um centro temos a condição limite de estabilidade, em que o sistema, excitado, oscila sem fim numa dada trajetória periódica (fechada).

Sempre que temos um sistema não linear com várias singularidades, temos que aplicar a noção de estabilidade local a cada uma delas. Num sistema linear a estabilidade é global.

5.1.3 A incerteza nas condições inicias e o caos

Vejamos agora o que acontece na fronteira das regiões de convergência para uma dada singularidade. Por exemplo, no gráfico PPLANE8, o segmento de reta y = 3, entre x = -2 e x = 0, é uma fronteira. As trajetórias acima divergem para infinito, as abaixo convergem para a origem:

Reduzindo a escala do eixo vertical, reencontramos sempre uma fronteira bem definida. Na figura seguinte o intervalo vertical é [2.9999 3.0001].

Coloca-se agora a seguinte questão: se as condições iniciais são medidas por um instrumento, e se o erro do instrumento é superior a 0,0001, será possível prever a evolução deste sistema não-linear?

Não é. Este facto ilustra uma das características do comportamento caótico de alguns sistemas não lineares: a impossibilidade de prever o seu futuro devido à incerteza nas condições iniciais. Uma diferença infinitesimal pode fazer a diferença. Daí o famoso **efeito de borboleta** primeiro utilizado por E.N. Lorenz em 1992 (Hilborn): "*Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas*" que depois se repetiu em múltiplas versões geográficas "*um bater de asas de borboleta em S. Francisco* (i.e., uma pequeníssima variação das condições iniciais) pode *provocar uma tempestade em Pequim* (isto é, o sistema tende para valores elevados)". Isto não quer dizer que o sistema seja estocástico. O sistema é de facto determinístico, mas a incerteza (da medição) nas condições iniciais impede-nos de prever a sua evolução.

O futuro de um sistema caótico é indeterminado ainda que o sistema seja determinístico.

As trajetórias que definem uma fronteira chamam-se **separatrizes** e separam o plano de fase em regiões de modos dinâmicos diferentes.

O conjunto de pontos onde se originam trajetórias que levam a um certo ponto singular chama-se **bacia de atração** desse ponto (*basin of attraction*), por analogia com o conceito de bacia hidrográfica.

5.2. Ciclos limite e indução de frequências de oscilação

Oscilador de van der Pol (Khoo)

Em finais da década de 20 do séc. XX, van der Pol (e van der Mark) propuseram o pêndulo rígido como um modelo mecânico da atividade oscilatória do coração humano. Este oscilador é dado pela equação diferencial não linear de segunda ordem (Khoo, 240):

$$\frac{dx^2}{dt^2} - c(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad c>0$$

Note-se que se c=0, obtém-se o oscilador linear. O termo em *dx/dt* exprime um amortecimento (atrito). Temos assim que o oscilador de van der Pol tem amortecimento não linear.

A fim de se analisar as suas trajetórias de fase, aplique-se a transformação de Lienard,

$$y = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} + \frac{x^3}{3} - x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = c(y - \frac{x^3}{3} + x)$$

por outro lado

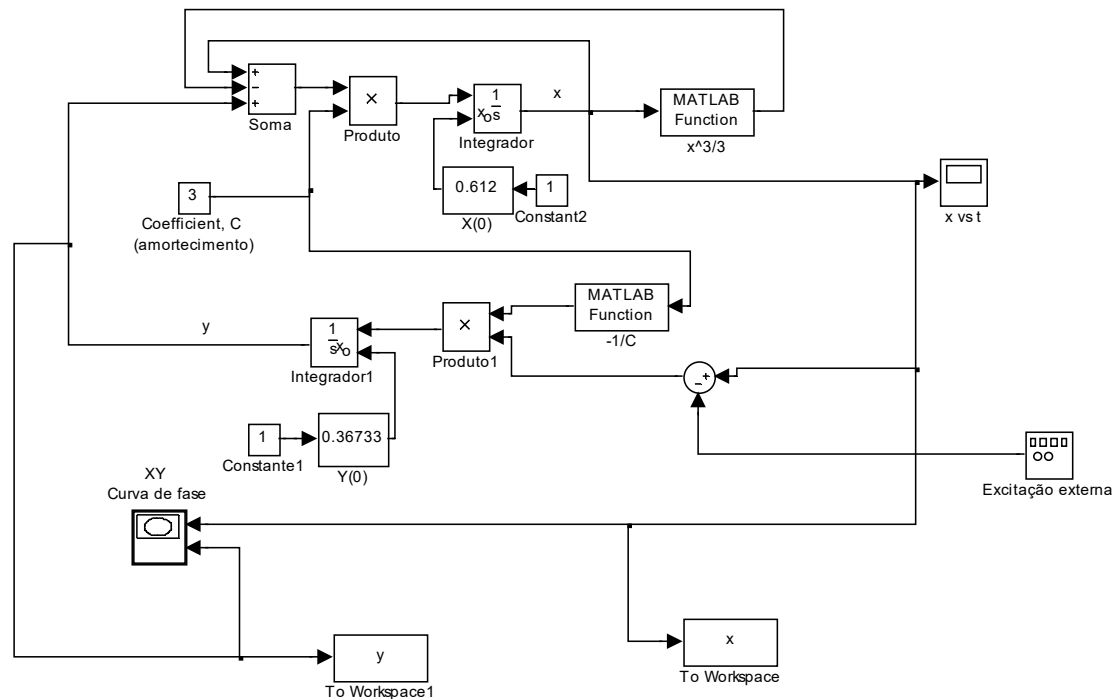
$$y = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} + \frac{x^3}{3} - x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d^2x}{dt^2} + x^2\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2)\frac{dx}{dt}$$

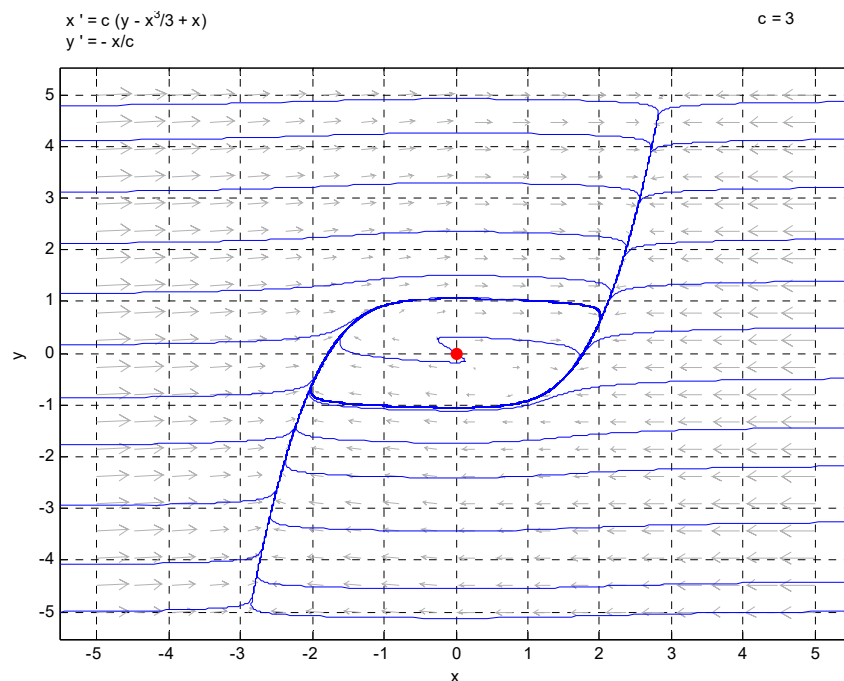
$$= \frac{1}{c}\left[\frac{d^2x}{dt^2} - c(1-x^2)\frac{dx}{dt}\right] = -\frac{1}{c}x$$

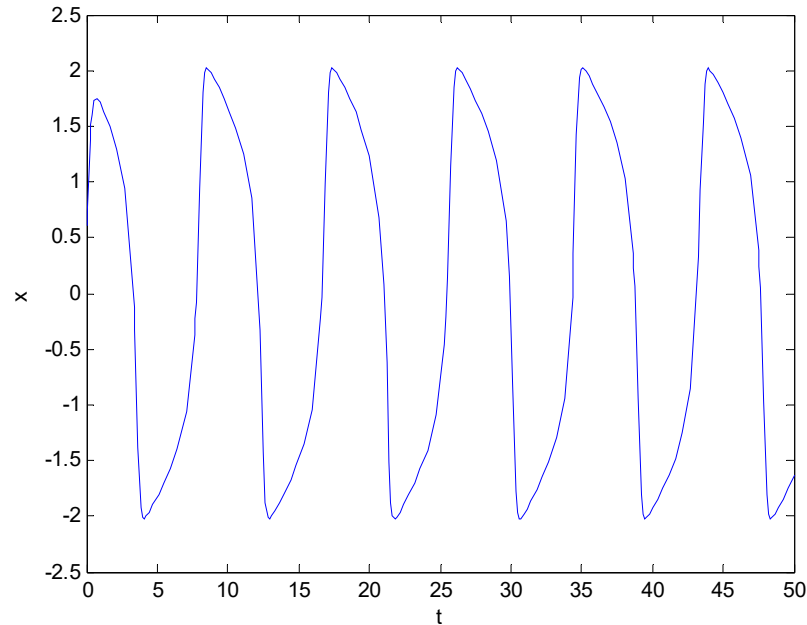
Temos assim duas equações diferenciais de 1ª ordem

$$\frac{dx}{dt} = c\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{c}$$

que poderemos estudar no plano de fase ou no Simulink. O autor segue aqui uma técnica interessante de definir as condições iniciais usando uma régua ajustável (*slider gain,* de *Math Operations)*) para as variar facilmente. As condições iniciais dos integradores são definidas como externas na janela de diálogo do bloco. Introduzindo uma excitação externa na equação de *x,* obtém-se o diagrama de blocos da figura.

Oscilador de van der Pol com excitação externa (Khoo, 244).

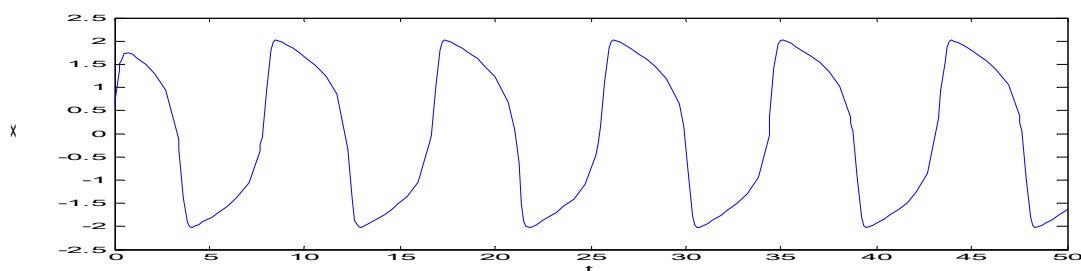
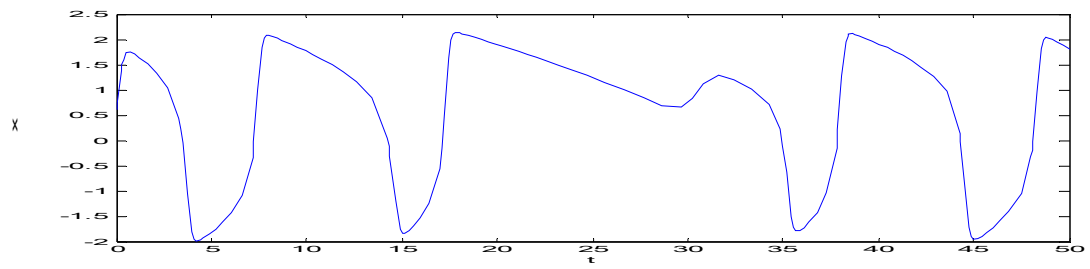
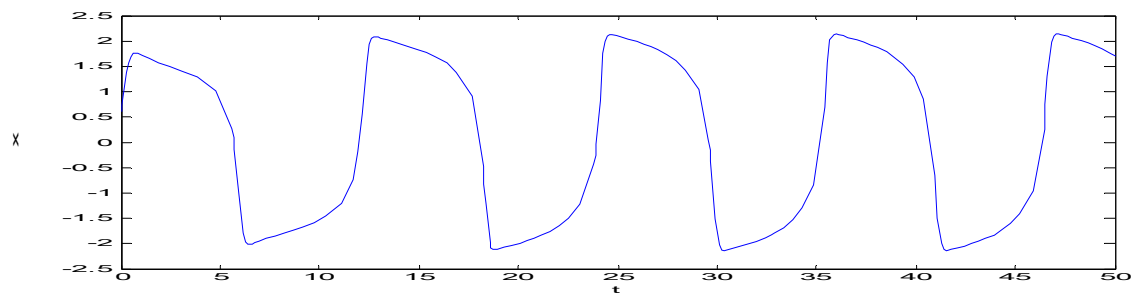
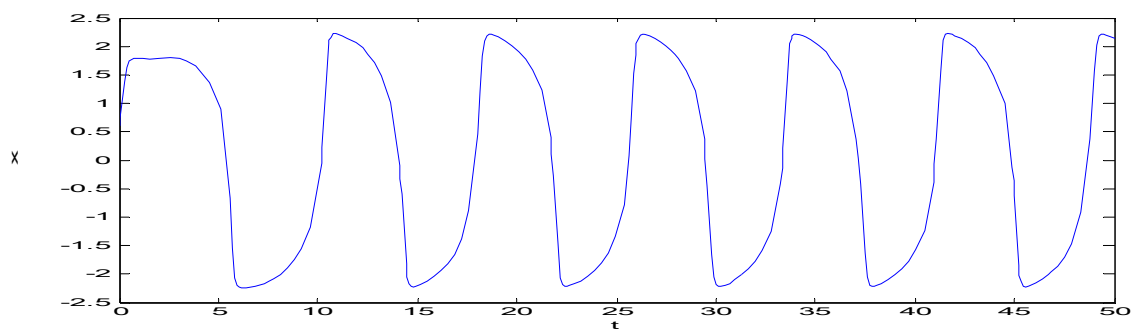
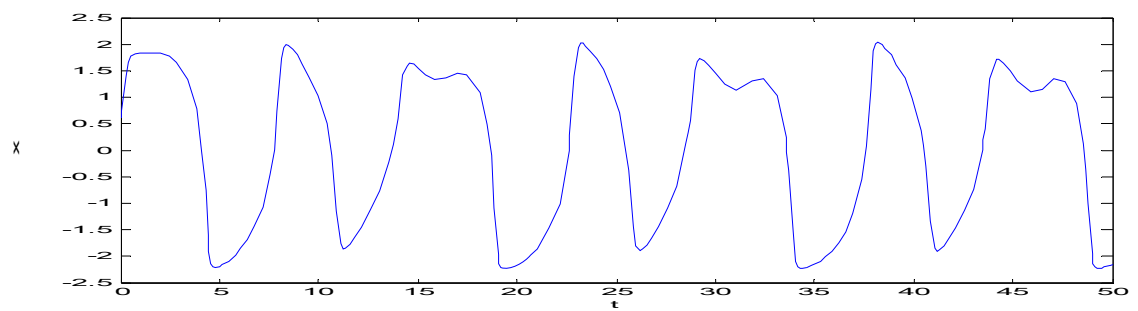
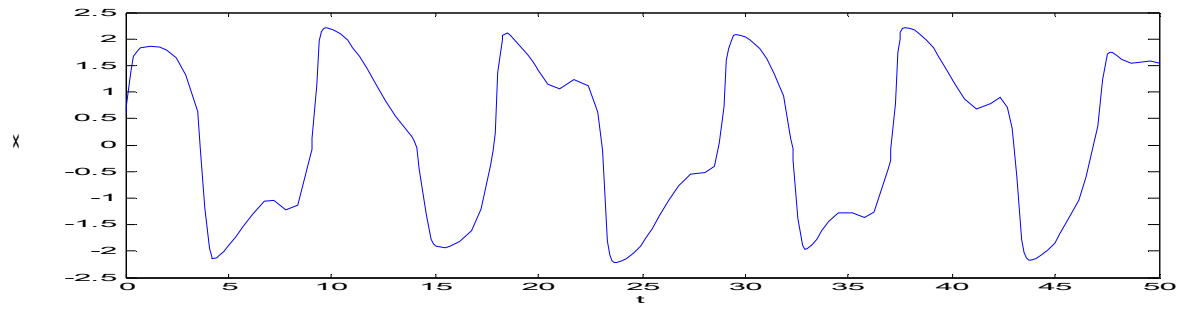
Com o PPLANE8 obtém-se o plano de fase seguinte, para c=3.

Todas as trajetórias vão dar à trajetória a grosso na figura. Tem-se assim, sempre, uma oscilação, e a trajetória respetiva é um ciclo limite estável (*limit-cycle*), pois é o limite de todas as trajetórias e elas aí permanecem. Mesmo se a condição inicial está dentro do ciclo limite, a

trajetória parte da condição inicial em direção ao ciclo limite e aí permanece. Se observarmos a evolução temporal de *x*, obtém-se (do Simulink), com a condição inicial x(0)=0,612 e y(0)=0,367, c=3, a curva,

onde se vê bem a oscilação característica de um ciclo limite. Estas oscilações são parecidas com a batida cardíaca. Têm período T=9 (calcula-se na resposta) e por isso a sua frequência natural (quando não há excitação externa, apenas condições iniciais não-nulas) f_n=1/T=0,11 Hertz.

Se acrescentarmos uma excitação externa (entrada) sinusoidal na equação de y,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{c} + \frac{B}{c} sen\omega t = -\frac{1}{c}(x - Bsen2\pi\, ft)$$

e aplicarmos vários valores de *f*, obteremos os seguintes efeitos:

excitação f=0,113Hz comportamento periódico

excitação f=0,01 Hz   comportamento não periódico

excitação f=0,09 Hz resposta f ≅ 0,09 Hz

excitação f=0,13 Hz   resposta f≅0,13

excitação f=0,20

f=0,25

Verificamos uma propriedade interessante dos sistemas oscilatórios não lineares.

Eles têm uma certa frequência natural, aquela que aparece quando a excitação externa é nula. Se excitarmos o sistema com uma frequência muito afastada (para mais ou para menos) dessa sua frequência natural, o comportamento resultante contém uma mistura de componentes que resultam da interação entre a frequência de excitação e a frequência natural; dessa mistura resulta em geral um sinal aperiódico.

Mas à medida que a frequência de excitação se aproxima da frequência natural do oscilador não linear, a partir de certa altura o oscilador "adota" a frequência de excitação ou, dito de outro modo, a excitação induz uma frequência de oscilação do sistema.

Esta propriedade é muito importante na prática: ela está na base dos *pacemakers* cardíacos. Também se verifica esta propriedade na adaptação dos ritmos biológicos ao ciclo dia-noite, o acoplamento entre a respiração e a pressão sanguínea, bem como a sincronização dos geradores fisiológicos de padrões centrais durante a caminhada e a corrida (Khoo, 244).

Outros fenómenos fisiológicos podem ser modelizados com recurso a osciladores não lineares. Por exemplo o oscilador de Poincaré é apropriado para simular as arritmias cardíacas (ver Khoo, 246).

5.3 Bifurcações e caos

Considere-se o modelo de crescimento populacional de uma espécie (também chamada equação logística, Khoo, 274). Ele tem a forma que deduzimos no Cap. 2, em modo discreto,

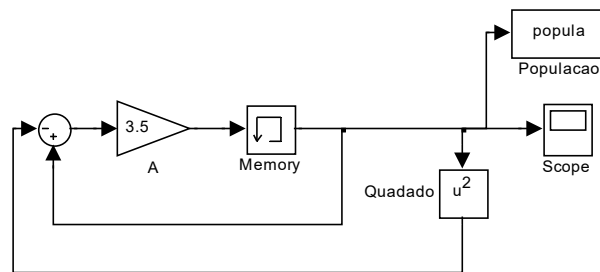
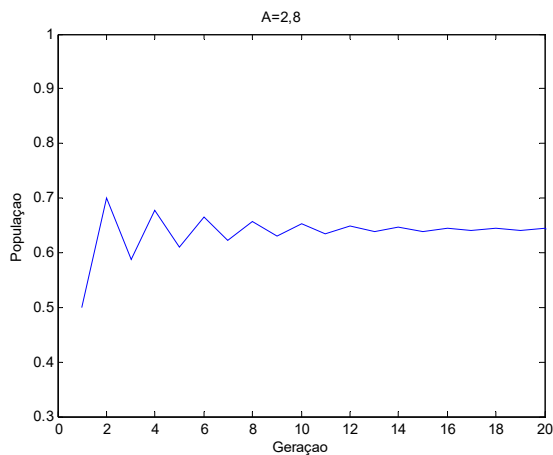
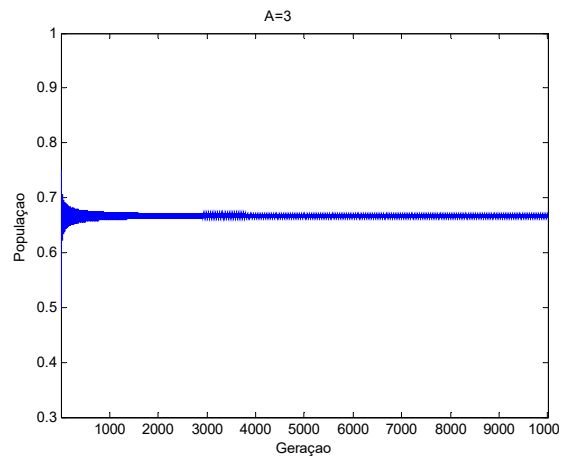
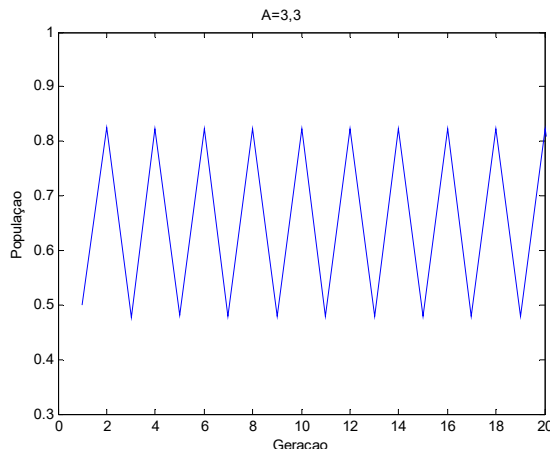
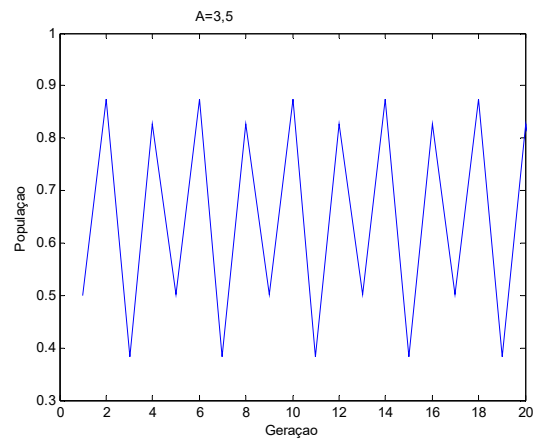
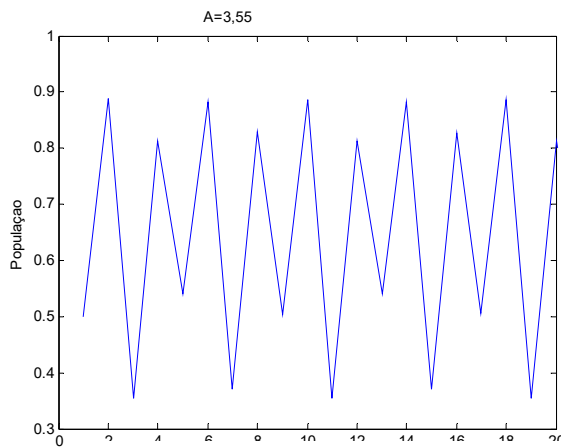
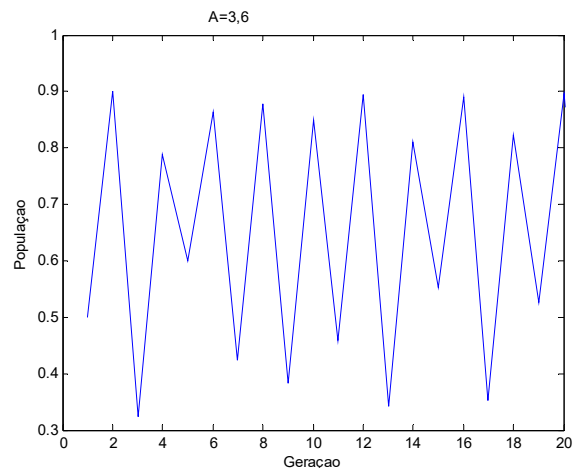
$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = A(x_k - x_k^2), \quad x \in [0,1]$$

em que A exprime a taxa de fecundidades da população.

Vimos que tem dois estados de equilíbrio,

$$\begin{cases} x_k = 1 - \dfrac{1}{A} \\ x_k = 0 \end{cases}$$

e a convergência para um ou para outro depende do estado inicial. Quando $A<1$ a única singularidade possível é a origem, $x_k=0$ (a espécie extingue-se).

Para o estudarmos com algum pormenor, dado que daí poderemos extrair muita informação, implemente-se em Simulink, usando o bloco de memória que faz o mesmo que um atraso puro:

Introduzindo diversos valores de A e simulando, obtém-se o seguinte:

A=2,8; atinge um regime final A=3; tende para um regime final

A=3,3,: oscila, período 1 geração
(ciclo limite estável de período 1)

A=3,5,: oscila, período 2
(ciclo limite estável de período 2)

A=3,55,: oscila, período 8
(ciclo limite estável de período 8)

A=3,6: caos (não há período)

O sistema apresenta um comportamento estranho: o seu período depende de *A*, a taxa de fecundidade. À medida que *A* aumenta, a população é periódica de período dependente de *A*: Assim *A* em

]3; 3,34495] oscila com período 2

]3,4495; 3,54408] oscila com período 4

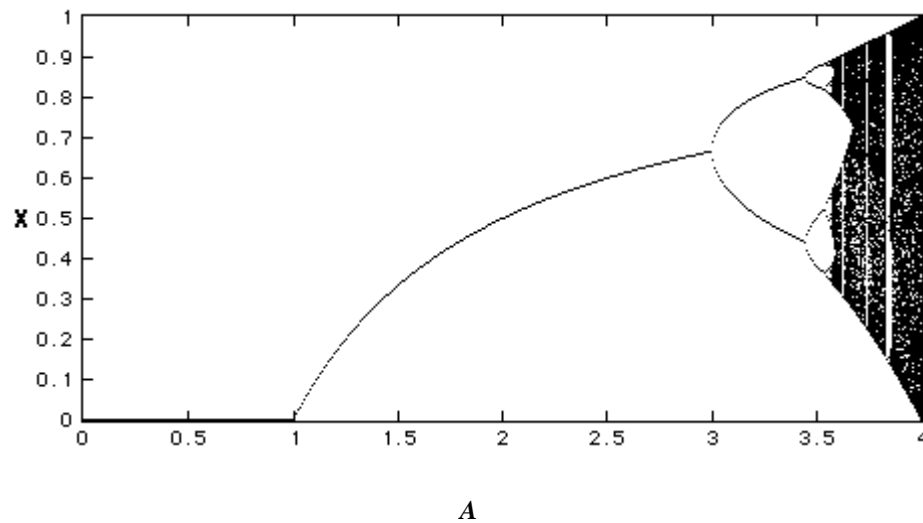
] 3,54408; 3,56440] oscila com período 8

Faça-se agora a seguinte construção gráfica:

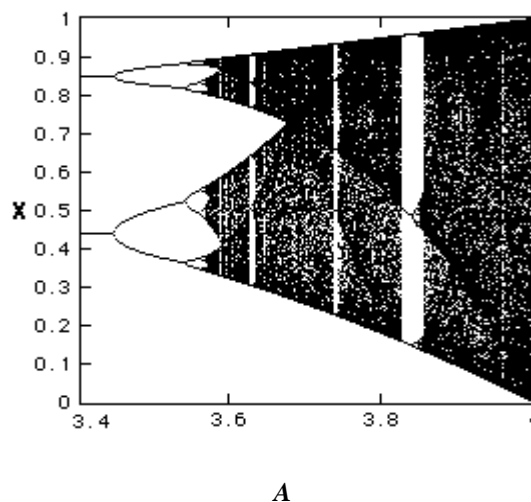
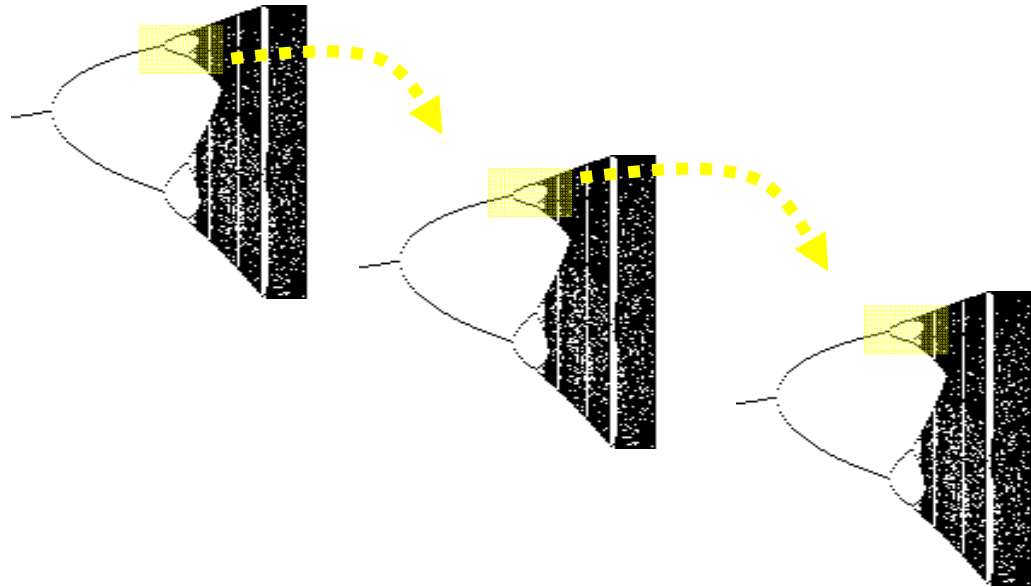
Para cada valor de *A* calculam-se os valores da população *x* que compõem o respetivo ciclo. Estes valores calculam-se simulando no Simulink e lendo depois no Workspace os valores do

vetor *popula* que compõem um período. Por exemplo para A=3,3 teremos x=0,8236 ou x=0,4794; para A=3,5 será $x \in$ {0,3828; 0,5009; 0,8269; 0,8750 }. Para A=0,55, $x \in$ {0.3548, 0.81265, 0.54049, 0.88168, 0.37034, 0.82781, 0.50601, 0.88737}. E assim sucessivamente. Para valores de A inferiores a 3 só teremos um valor, o do regime permanente; para valores inferiores a 1, o regime permanente á a origem. Graficando obtém-se a figura seguinte, chamada o **diagrama de bifurcação** da função logística.

Diagrama de bifurcação do modelo de crescimento populacional.

A

Ampliando a parte final, entre 3,4 e 4, obtém-se uma figura em que se repetem, a uma outra escala, os padrões da figura original. Se nesta segunda ampliássemos novamente, iríamos obter de novo os padrões da figura inicial. Isto é, aumentando o detalhe de observação encontram-se sempre os mesmos padrões. Esta é uma característica dos fractais.

A

(de http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/BD.html)

Temos assim, com a variação de *A*, uma duplicação do período (de oscilação), até que deixa de se observar um comportamento periódico. Este comportamento, em que não há repetição de padrões, é caótico. Um ponto (no eixo de *A*) em que se iniciam dois caminhos chama-se **bifurcação**. Para se obter o diagrama de bifurcação procede-se do seguinte modo:

Para cada valor de *A* calculam-se os valores da população *x* que compõem o respetivo ciclo. Por exemplo para *A*=3,3 teremos *x*=0,8236 ou *x*=0,4794; para *A*=3,5 será $x \in$ {0,3828; 0,5009; 0,8269; 0,8750 }. Para *A*=0,55, $x \in$ {0.3548, 0.81265, 0.54049, 0.88168, 0.37034, 0.82781, 0.50601, 0.88737}. E assim sucessivamente. Graficando obtém-se as figuras acima.

Os números de Feigenbaun

Seja A_n o valor de *A* em que o período 2^n dá origem ao perído 2^{n+1}. O número

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}$$

chama-se o **delta de Feigenbaum**.

n	2^n	A_n	δ_n
1	2	3	

2	4	3,449490	
3	8	3,544090	4,75147991543339
4	16	3,564407	4,65619924201411
5	32	3.568750	4,66842830882361
6	64	3,569692	4,66452304394492
7	128	3,569891	4,68844221104788
8	256	3,569934	…
9	512	3,569943	
10	1024	3,5699451	
11	2048	3,569945557	
infinito	ponto de acumulação	3,569945672	4,669201…

Nesta tabela (por exemplo em http://to-campos.planetaclix.pt/fractal/caos.html) o ponto de acumulação é o ponto em que deixa de haver período e se inicia o comportamento caótico.

Feigenbaun estudou a evolução do seu delta para vários sistemas, no Laboratório Nacional de los Alamos (USA), e para todos encontrou em 1975 o seguinte resultado (Hilborn 48):

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 4,66920161...$$

Segundo Hilborn (p. 48) este número está destinado a figurar no Panteão dos números da Física (tal como o π, o número de ouro $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, etc.) e tem sido considerado uma constante universal.

5.4 Exemplos de sistemas fisiológicos com comportamento caótico

Regulação da densidade de neutrófilos no sangue (de Khoo)

O número de glóbulos brancos no sangue de um doente com leucemia mielóide crónica (*chronic myeloid leukemia*, CML) tem grande flutuações em torno de valores elevados. Essas flutuações são aproximadamente periódicas com um ciclo de 30 a 70 dias. Essas flutuações

foram atribuídas a alterações da dinâmica do sistema de controlo fisiológico que regula o equilíbrio entre a produção e a destruição dos neutrófilos (um dos tipos de glóbulos brancos) que circulam pelo corpo humano. Para modelizar esse sistema de regulação foi proposta a seguinte equação diferencial não linear com atraso puro (Khoo, 278)

$\frac{dx}{dt}$ = taxa de lançamento de neutrófilos no sangue - taxa de morte dos neutrófilos

A taxa de produção na medula óssea segue uma lei do tipo $\frac{\beta\theta^n x(t)}{\theta^n + x(t)}$.

Mas há um tempo T_d de maturação, que demora a lançá-los no sangue, depois de produzidos.

Por isso teremos um atraso puro, ou de transporte, na equação diferencial.

A taxa de morte dos neutrófilos é proporcional à sua concentração no sangue.

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta\theta^n x(t-T_d)}{\theta^n + x(t-T_d)} - \gamma x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \gamma x(t) = \frac{\beta\theta^n x(t-T_d)}{\theta^n + x(t-T_d)}$$

$x(t) \triangleq$ densidade de neutrófilos (um dos tipos de glóbulos brancos) no sangue no instante t

$T_d \triangleq$ atraso puro é o tempo de maturação (desde a produção até ao lançamento na corrente sauguínea)

$\gamma \triangleq$ taxa de destruição das células devido a diversos fatores

θ e n determinam a relação entre a taxa de produção de neutrófilos e a densidade passada de neutrófilos

β é um fator de escala

Sejam

$\theta = 1, \;\; n = 10, \;\; \beta = 0,2 \quad \gamma = 0,1.$

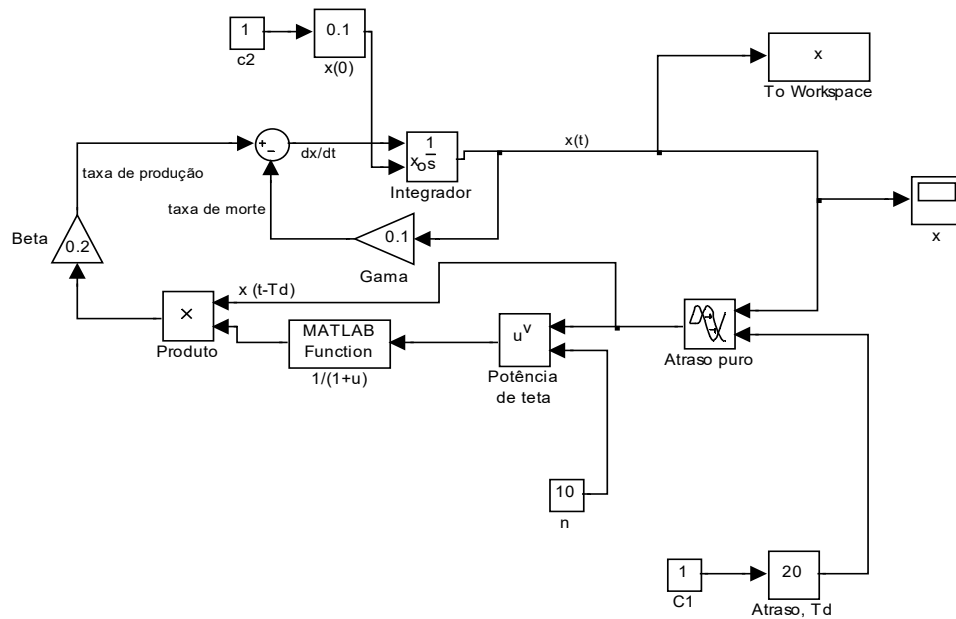
Calculando os pontos singulares

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0,2x(t-T_d)}{1+x(t-T_d)^{10}} - 0,1x(t) = 0$$

como se trata de regime permanente, em que o atraso puro deixou de ter influência,

$$\frac{0,2x(t)}{1+x(t)^{10}} - 0,1x(t) = 0 \Rightarrow 0,2x(t) - 0,1x(t) - 0,1x(t)^{11} = 0 \Rightarrow 0,1x(t)(1-x(t)^{10}) = 0$$

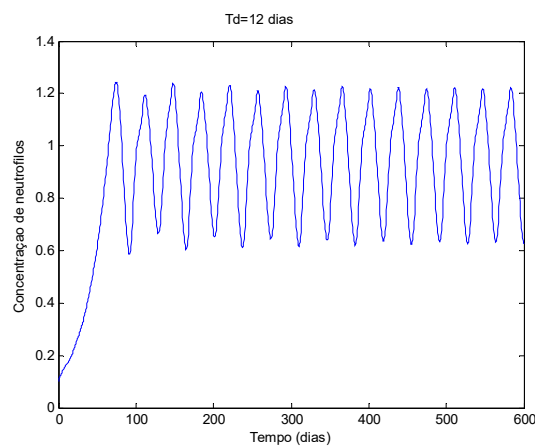
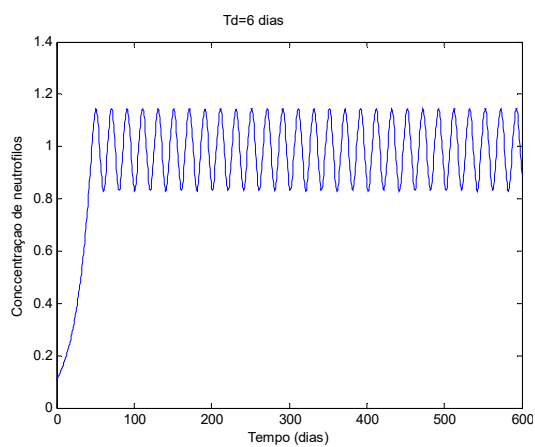
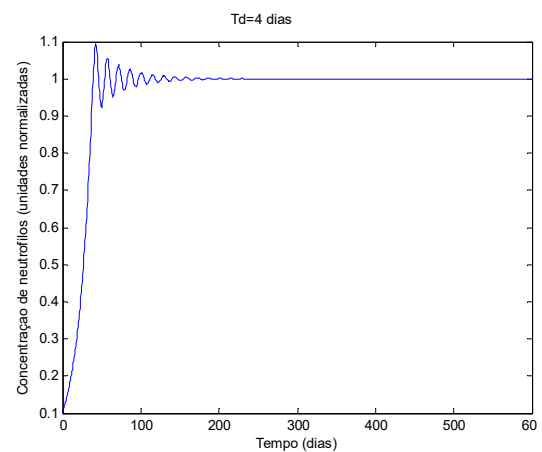
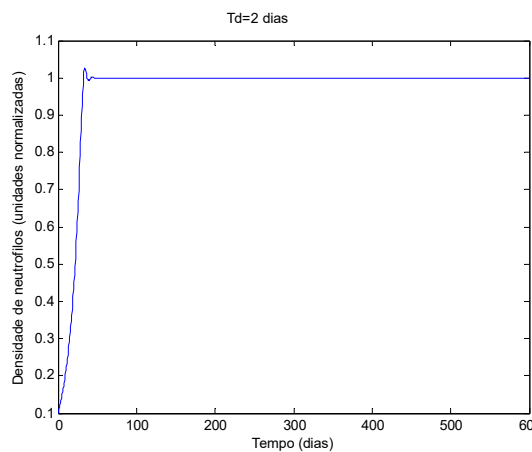
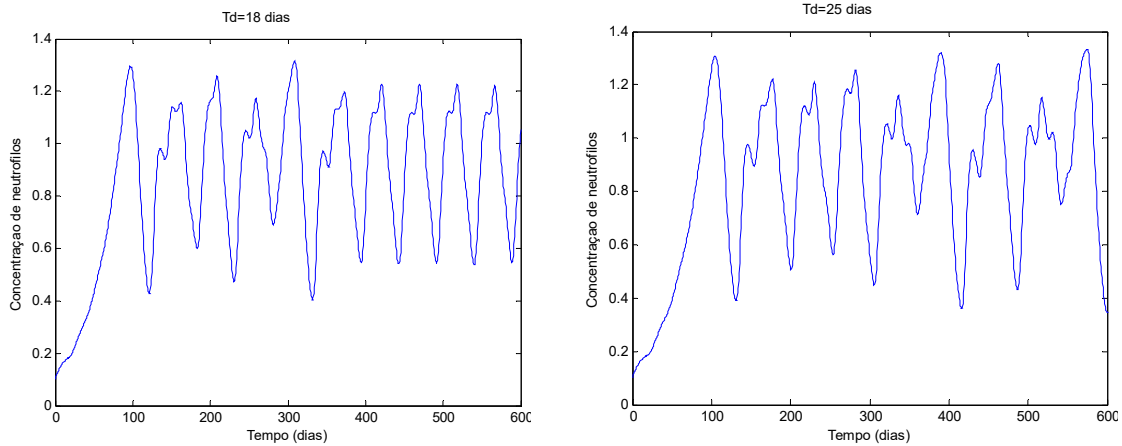
$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ 1 - x(t)^{10} = 0 \end{cases} \begin{cases} x(t) = 0 \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

conclui-se que tem dois estados de equilíbrio: a origem e o ponto 1 (a que corresponde uma taxa de produção de neutrófilos de 0,1. Implementando no Simulink,

Vejamos o que acontece para diversos valores de atraso puro (ou atraso de transporte)

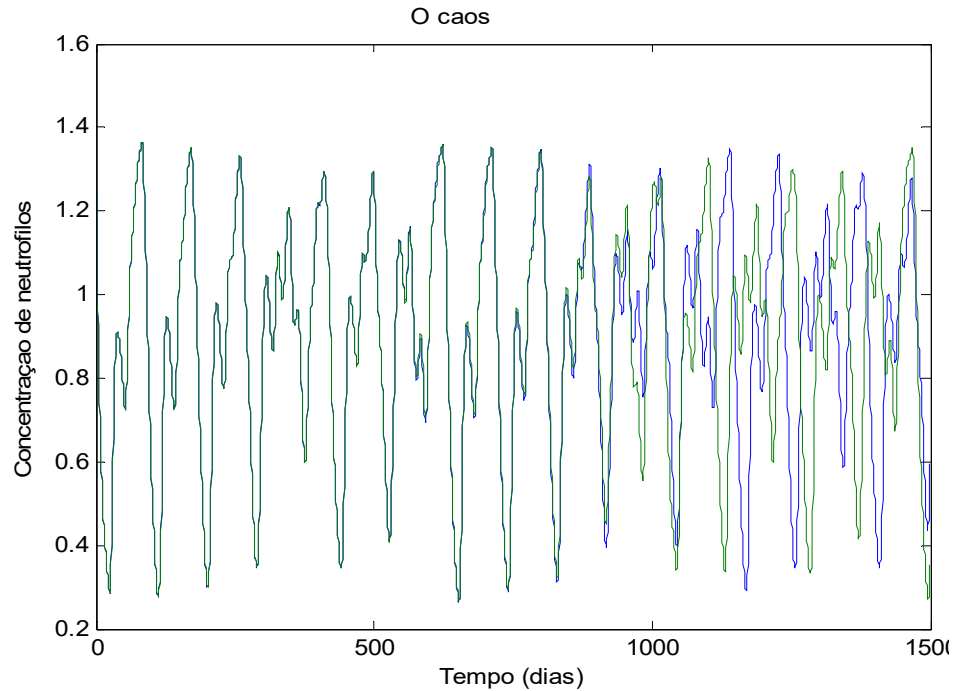
Td=2 dias

Td=4 dias

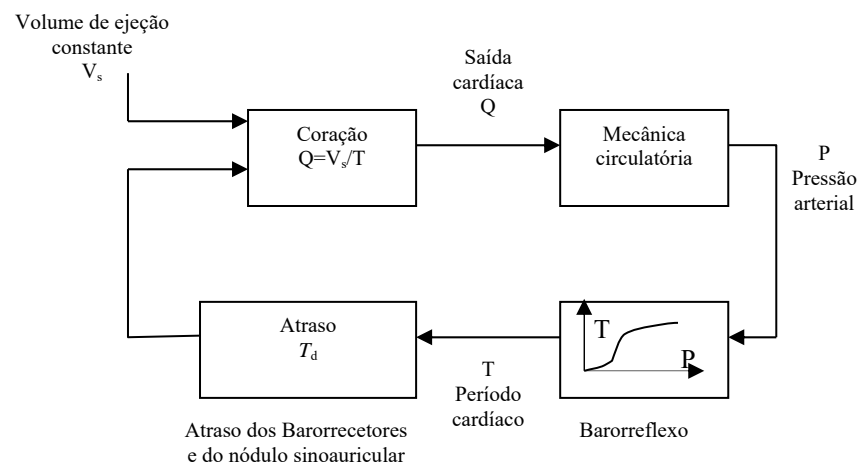
Td=6 dias

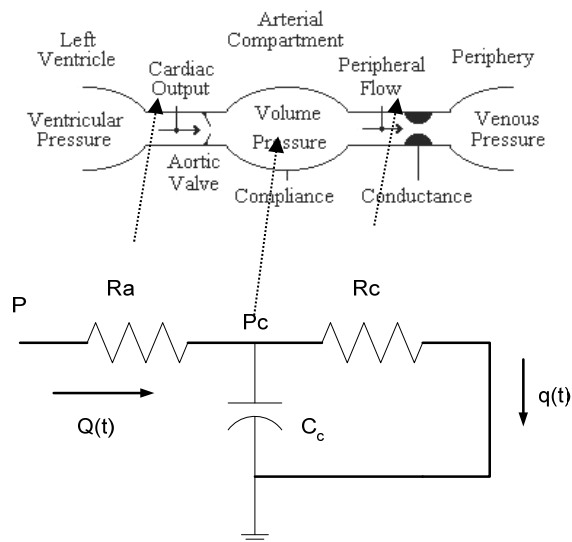
Td=12 dias

Para pequenos valores de atraso de transporte, T_d , o sistema é estável em torno do regime permanente x=1. Nestas circunstâncias se por qualquer razão há uma variação brusca na densidade (por perda de sangue, por exemplo), o sistema de regulação faz com que seja rapidamente reposto o regime permanente. O atraso (que exprime o tempo de maturação dos neutrófilos) tem no entanto, à medida que assume valores significativos, um efeito desestabilizador, provocando oscilação aos 6 dias, oscilação que aumenta de amplitude com o atraso, até que surge um comportamento caótico para valores muito elevados de T_d. A oscilação com T_d=6 tem um período de 20 dias (aproximadamente), dentro do intervalo [17,28] que se observa nos humanos vítimas da doença chamada neutropenia cíclica.

Para valores de T_d superiores a 20 dias, temos a situação dos doentes de leucemia crónica, expressa pelo comportamento caótico do sistema (flutuações aparentemente aleatórias, mas num sistema determinístico).

Se experimentarmos com duas condições iniciais x(0) = 1,24 e x(0)=1,25 obtemos o comportamento típico de um sistema caótico: até 900 dias, as duas trajetórias pouco divergem, mas depois seguem percursos bem diferentes, mantendo-se ambas dentro de uma região limitada.

Variabilidade cardiovascular (de Khoo)

No ciclo cardíaco verificam-se flutuações na duração do intervalo entre batidas, na pressão arterial, e na saída cardíaca. É possível interpretar essas flutuações como as de um sistema caótico, nomeadamente através do modelo de Cavalcanti e Belardinelli (1996) que estabelece que essas variabilidades espontâneas na batida cardíaca e na pressão sanguínea resultam do comportamento caótico que ocorre no sistema de controlo do barorreflexo.

Poderemos representar este sistema de controlo pelo diagrama de blocos, admitindo que o volume de ejeção cardíaca é constante (versão simplificada do modelo de Cavalcanti e Bellardinelli):

Dados V_S e T o coração produz a saída volumétrica Q que se sujeita à mecânica do sistema circulatório, saindo do coração a uma pressão P. As células sensíveis à pressão (barorreflexo) enviam ao cérebro o valor da pressão, e este envia ao nódulo sinoauricular (um ponto nos músculos do coração) o período T necessário para manter uma situação saudável. O barorreflexo a o nódulo sinoauricular levam algum tempo a reagir, que é representado pelo atraso puro T_d. Agindo sobre os músculos da aurícula, produz-se o período T.

A mecânica circulatória, para uma dada saída (volume de sangue) cardíaca, determina o nível da pressão sanguínea resultante. Esta mecânica pode modelizar-se por um modelo Windkessel de 3 elementos (relembrem-se as analogias do Cap.2) que relaciona a pressão à saída do coração com o caudal sanguíneo.

em que

P pressão à saída do ventrículo esquerdo

P_c pressão auxiliar para cálculo

R_a resistência (fluídica) da válvula da aorta

R_c resistência equivalente do sistema circulatório

C_c complacência equivalente do sistema circulatório

Q(t) fluxo sanguíneo que sai do ventrículo esquerdo

q(t) fluxo sanguíneo que entra no sistema circulatório

T_S é a duração da sístole e o ciclo cardíaco tem uma duração T.

O volume de ejeção (*stroke volume*) é a quantidade de sangue que sai durante um ciclo, isto é,

$$V_S = \int_0^{T_S} Q(t)dt$$

Durante a diástole a válvula da aorta está fechada, e por isso

$$Q(t)=0,\ T_S \leq t \leq T$$

Como C_c e R_c estão em paralelo, a impedância equivalente é

$$Z_c = \frac{R_c \frac{1}{sC}}{R_c + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{R_c}{sC}}{\frac{sR_cC_c+1}{sC}} = \frac{R_c}{sR_cC_c+1}$$

Agora

$$P = (R_a + Z_c)Q$$
$$\frac{P(s)}{Q(s)} = R_a + Z_c = R_a + \frac{R_c}{sR_cC_c+1} = \frac{R_a + R_c + sR_aR_cC_c}{1+sR_cC_c}$$

Ou, de outro modo,

$$Q(t) = q_C(t) + q(t)$$

$$P - P_c = QR_a$$
$$P_C = \frac{1}{C_c}\int_0^t (Q-q)dt = R_cq$$
$$q = \frac{P_1}{R_c} = \frac{P-R_aQ}{R_c}$$
$$P = \frac{1}{C_c}\int_0^t (Q-q)dt + QR_a = \frac{1}{C_c}\int_0^t (Q - \frac{P-R_aQ}{R_c})dt + QR_a$$

Derivando ambos os lados da equação,

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{C_c}\left(Q-\frac{P-R_aQ}{R_c}\right)+R_a\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{C_c}\left(\frac{QR_c-P+R_aQ}{R_c}\right)+R_a\frac{dQ}{dt}$$

$$R_cC_c\frac{dP}{dt}=QR_c-P+R_aQ+R_aR_cC_c\frac{dQ}{dt}$$

e finalmente,

$$R_cC_c\frac{dP}{dt}+P=R_aR_cC_c\frac{dQ}{dt}+(R_a+R_c)Q$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta equação diferencial obtém-se o mesmo resultado que pelo método da impedância equivalente:

$$sR_cC_cP(s)+P(s)=sR_aR_cC_cQ(s)+(R_a+R_c)Q(s)$$
$$(sR_cC_c+1)P(s)=(sR_aR_cC_c+(R_a+R_c))Q(s)$$
$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{sR_aR_cC_c+(R_a+R_c)}{sR_cC_c+1}$$

Usam-se os valores C_c=1,333 ml mm Hg^{-1}, R_c=0,900 mm Hg s ml^{-1} R_a=0,039 mm Hg s ml^{-1}.

Para completar o diagrama de blocos inicial é necessário:

i) coração Q=Vs/T

ii) barorreflexo que dá a relação entre a pressão P e o período T

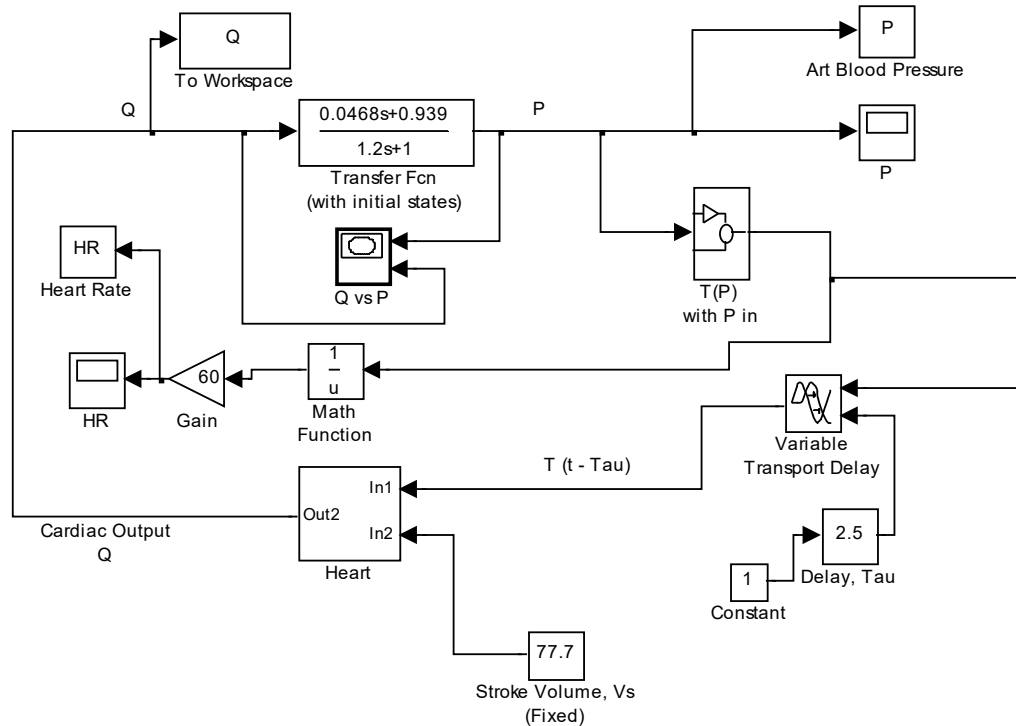
Esta relação é dada por

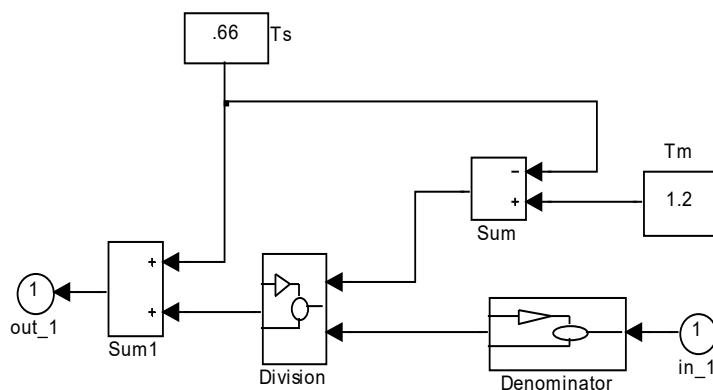
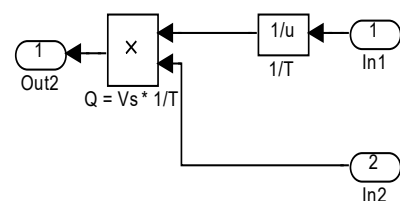
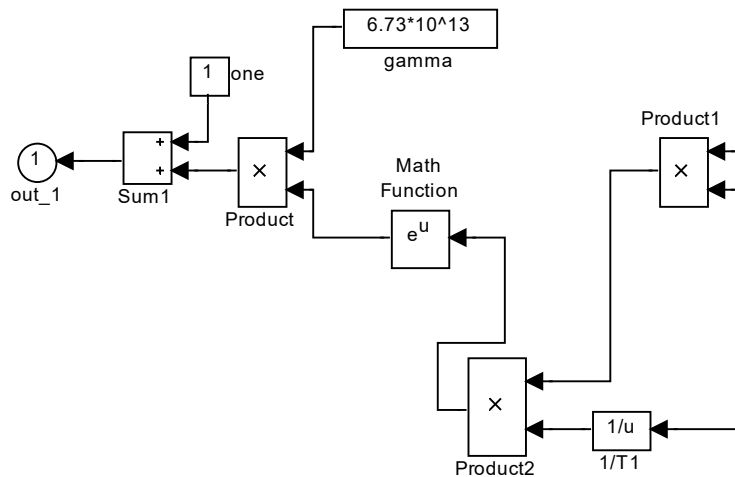
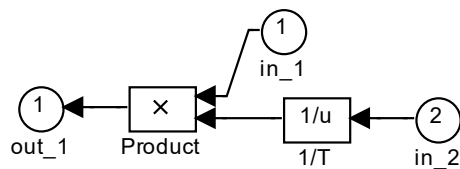
$$T(P)=T_{\min}+\frac{T_{\max}-T_{\min}}{1+\gamma e^{-\alpha P/P_e}}$$

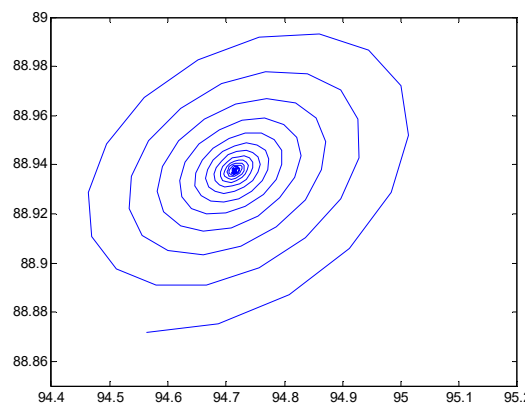
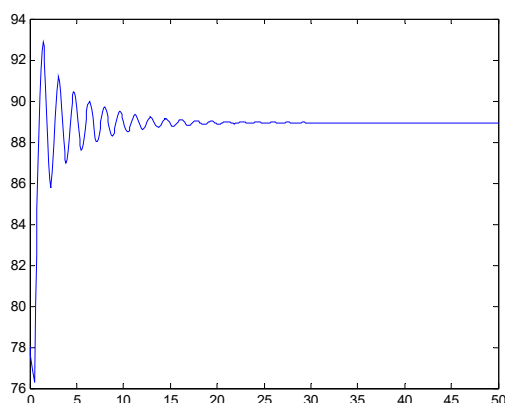
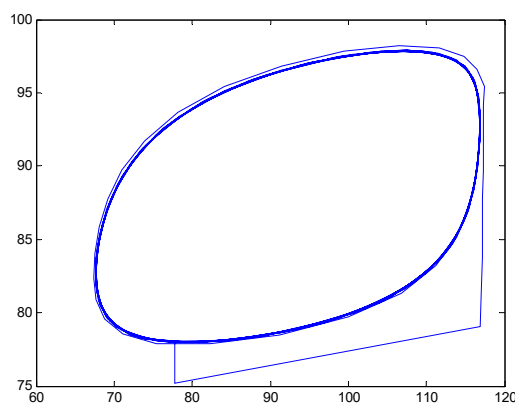
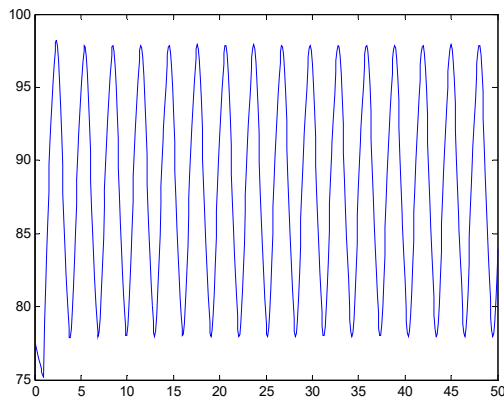
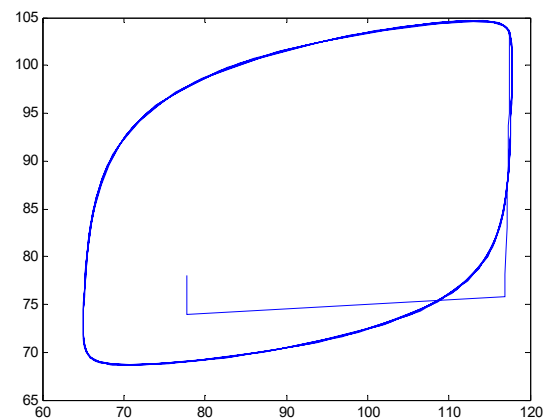
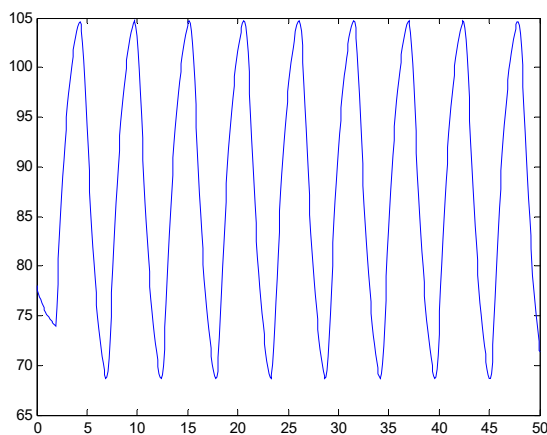
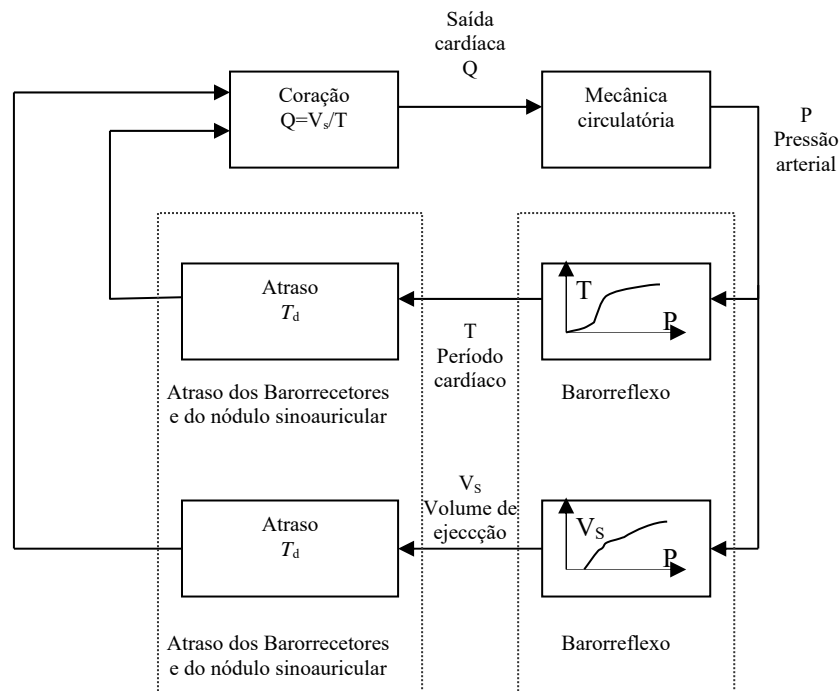
e exprime o efeito da perceção pelo sistema nervoso central do valor da pressão e do consequente ajuste do ritmo cardíaco. Toma-se T_{min}=0,66 s T_{max}= 1,2s P_e=89 mm Hg, α=31 γ=6,7.10^{13}

ii) o atraso puro exprime o tempo de reação do sistema nervoso a alterações da pressão.

Juntando todos os blocos, implementa-se no Simulink. O ficheiro pode ser descarregado de ftp://ftp.ieee.org/uploads/press/khoo, Cap 10, cvvarl.mdl. Alguns blocos são subsistemas. Clicando neles podem-se ver em detalhe. A técnica dos subsistemas permite compor

diagramas complexos com maior legibilidade. Para criar um subsistema, selecionam-se os respetivos elementos e no menu "Edit" aciona-se "Create Subsystem". O Simulink cria automaticamente as suas ligações de entrada ("In") e de saída ("Out") (de Khoo, 282)

(nota: o τ é o tempo de atraso T_d)

Bloco subsistema T(P)

Bloco subsistema Heart

Denominator (sub-subsistema)

Division (sub-subsistema).

“Heart Rate (HR)” , em batidas por minuto, é dado por 60/T, sendo T o período em segundos. Podem observar-se as evoluções temporais de P, de HR e as trajetórias no plano (Q,P), ou seja, as curvas de fase. O parâmetro mais influente é o atraso puro τ. Por simulação pode ver-se que à medida que τ aumenta , o sistema torna-se oscilatório e com período que cresce com T_d (ou seja Tau no diagrama Simulink).

T_d=0,5 Plano de fase

T_d =2

O modelo completo de Cavalcanti e Belardinelli (publicado em IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 43, nº 1, pp 982-989, 1996) inclui duas malhas de retroação que interagem uma com a outra: uma representa o efeito do barorreflexo na batida cardíaca (heart rate) tal como no modelo simplificado, e a outra representa o efeito do barorreflexo na contratilidade do coração, que por sua vez afeta o volume de ejeção (*stroke volume*) que aqui é variável e regulado pelo sistema nervoso. Da interação entre estas duas malhas de realimentação surge o caos, com veremos. Teremos o diagrama de blocos seguinte:

Agora o nódulo sinoarterial cumpre duas ordens emanadas do cérebro: uma para T e outra para a contratilidade (de que resulta o volume de ejeção V_S).

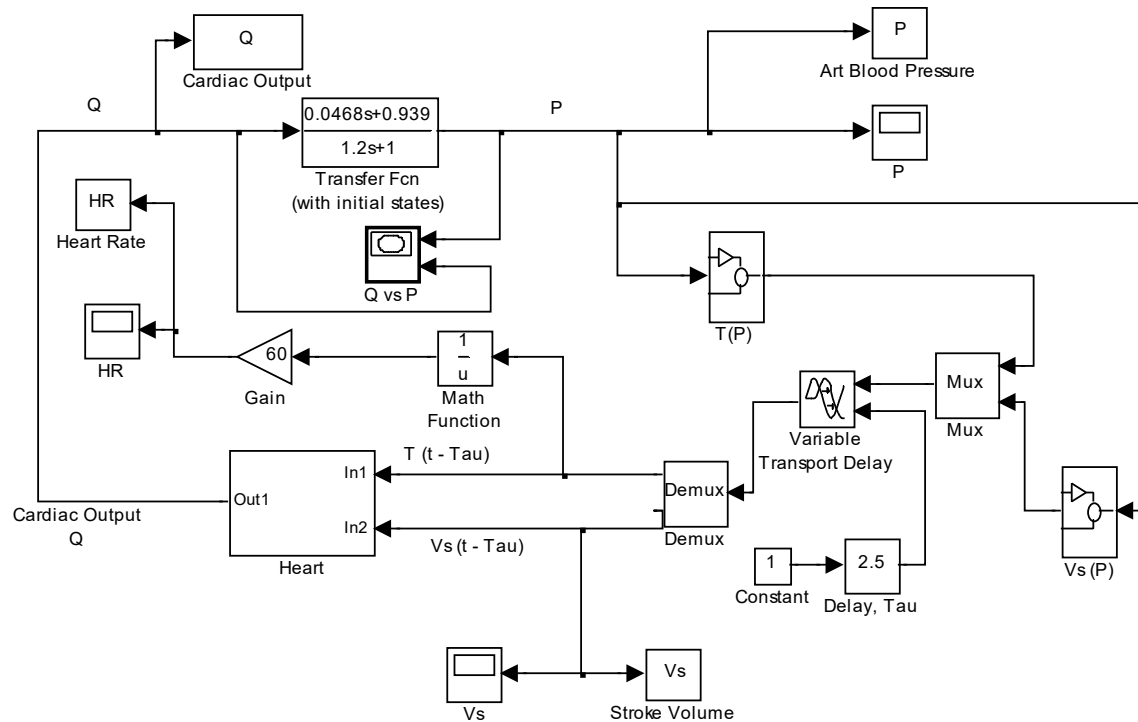
A variação de T com P, na primeira malha de retroação, mantém-se como no modelo anterior. É uma função de tipo sigmoidal (em forma de S).

Quanto ao volume de ejeção V_S, ele é também uma função de tipo sigmoidal, mas com diferentes formas e parâmetros:

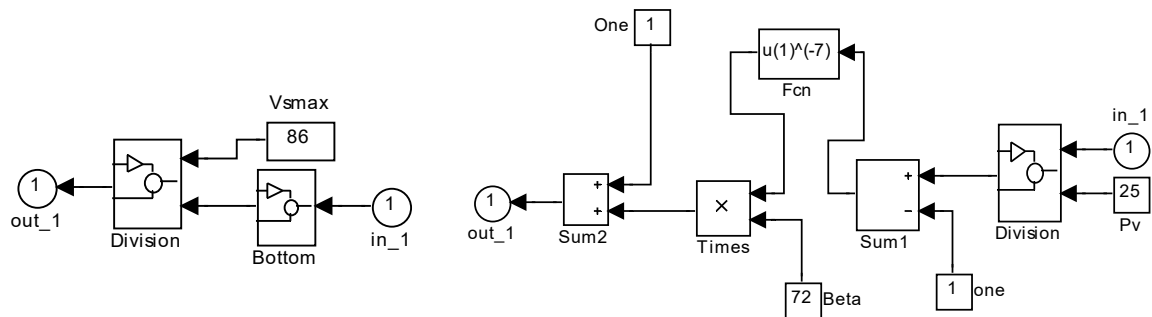
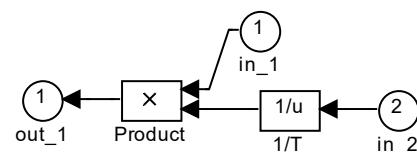
$$V_S(P) = V_{S\max} \times \frac{1}{1+\beta\left(\frac{P}{P_V}-1\right)^{-7}}$$

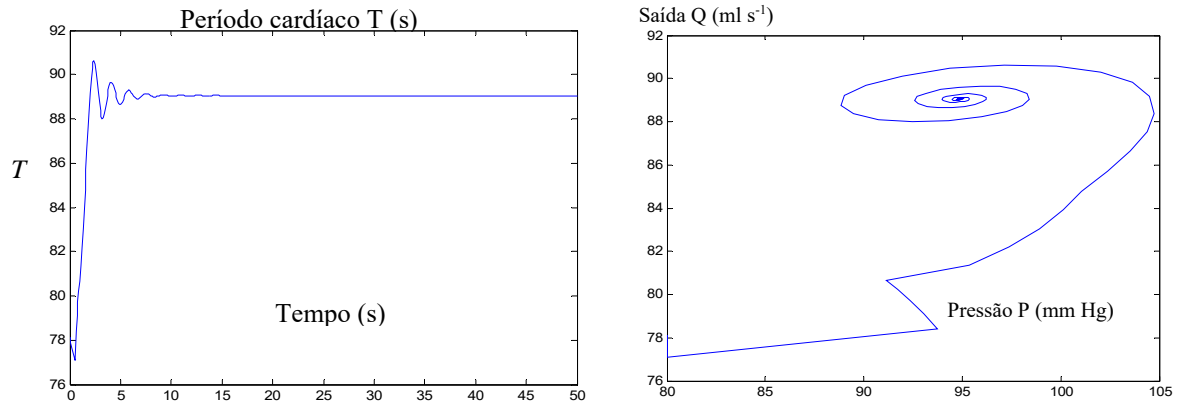
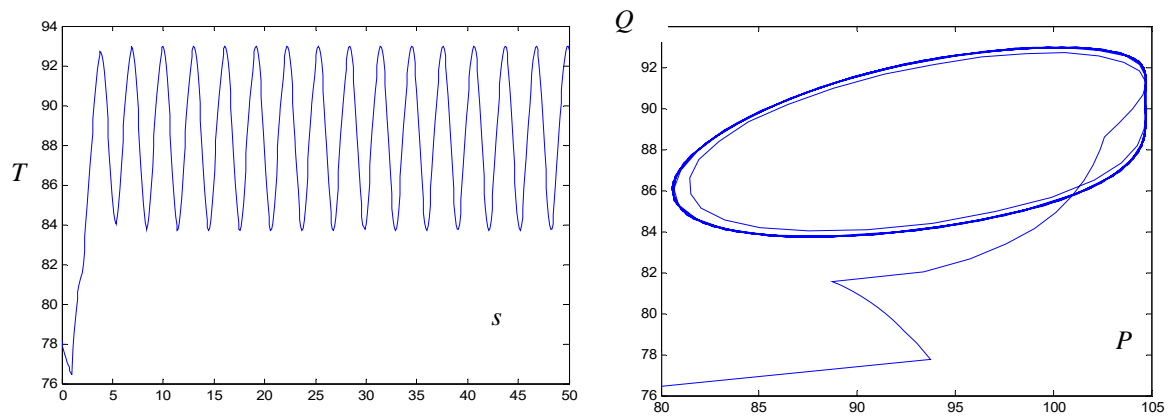
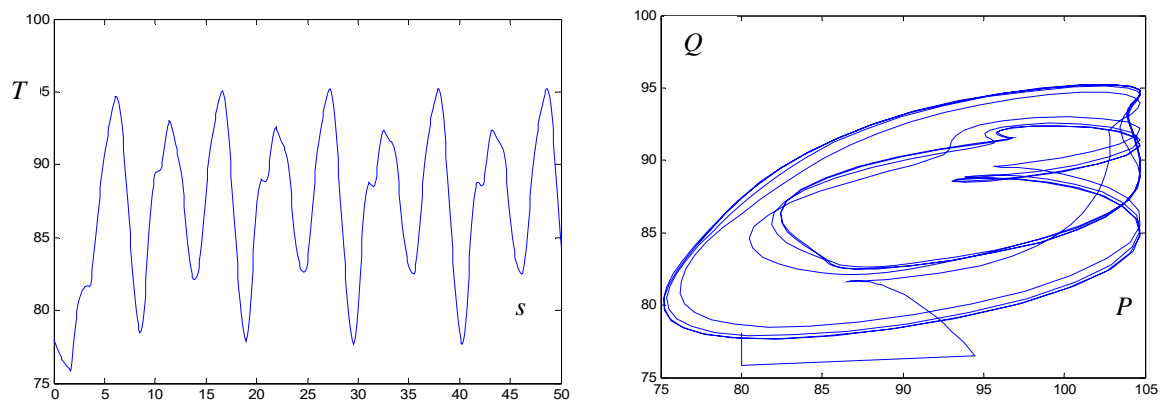
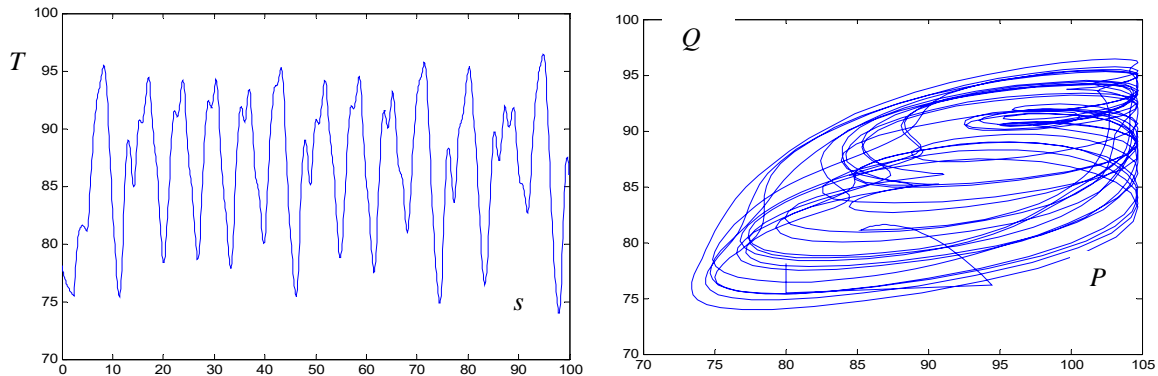
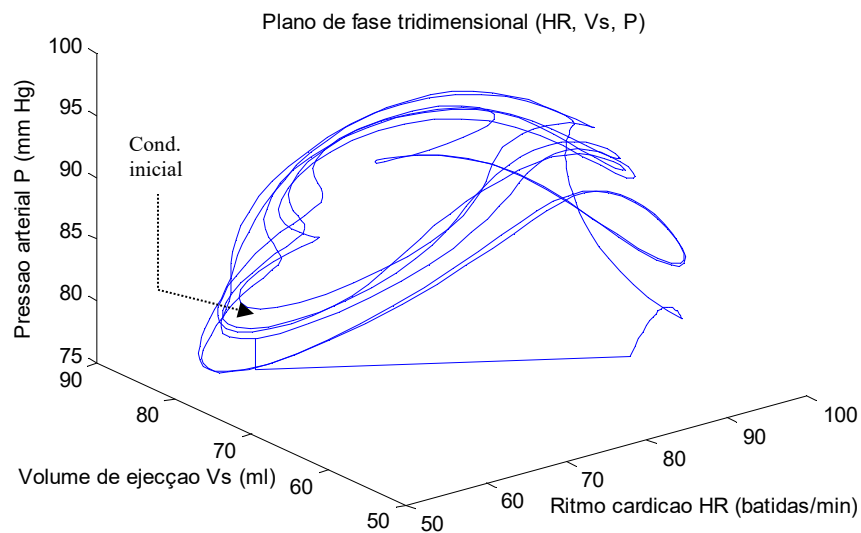
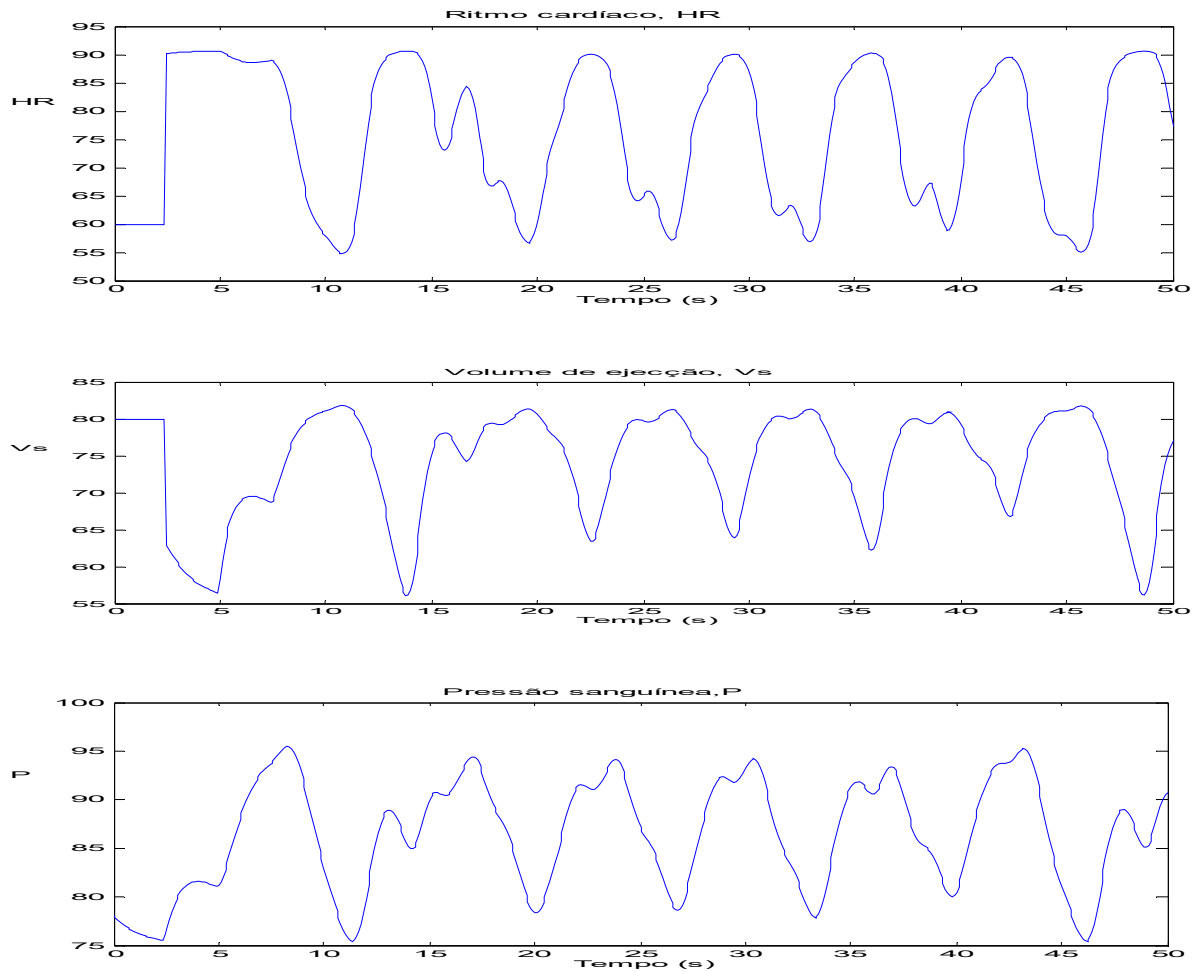
$$V_{S\max} = 86$$
$$P_V = 25$$
$$\beta = 72 \quad \text{(unidades apropriadas)}$$

Implementando no Simulink, ou descarregando de

(https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=resource&bcsId=11138&itemId=1119055334&resourceId=43992, 27/07/2022)

(Nota: o tempo de atraso T_d é o Tau do diagrama)

Subsistema Vs(P)

Sub-subsistema *Bottom*

Sub-subsistema *Division*

O tempo de atraso, em sistemas com retroação (*feedback*) é muito problemático: normalmente tende a desestabilizar o sistema. Vejamos a sua influência neste caso, por simulação repetida no Simulink para τ=0,5;1;1,8;2,5.

T_d=0,5: obtém-se regime estacionário (foco estável) Plano de fase

T_d=1: obtém-se um ciclo-limite (centro)

T_d=1,8 efeito de duplicação do período (bifurcação)

T_d=2,5 : caos

Constata-se que para pequenos valores de T_d o sistema alcança um regime estacionário, correspondendo a um foco estável. Aumentando T_d a dinâmica do sistema muda qualitativamente, aparecendo oscilações (T_d =1) e bifurcações (T_d =1,8) levando à duplicação do período de oscilação. Aumentando T_d ainda mais o sistema atinge o caos (T_d =2,5); pode-se observar no plano de fase que, neste caso, as trajetórias são todas distintas, não aparecendo repetições de padrões (no intervalo de tempo simulado, que generalizamos). A figura seguinte representa a trajetória do comportamento caótico no espaço tridimensional (HR- Heart Rate, V_s , P). Note-se o seu caráter errático.

(Esta figura obtém-se escrevendo na janela de comando do Matlab, após a simulação no Simulink, “>>*plot3(HR,Vs,P”*)

Estes dois exemplos de sistemas fisiológicos mostram que o caos pode aparecer em sistemas de ordem relativamente baixa quando existem tempos de atraso e malhas de retroação inter atuantes. Do ponto de vista fisiológico, dado que estes modelos são simplificações da complexa realidade, é natural que os resultados obtidos nem sempre estejam em concordância com a realidade. Mas eles permitem explicar muito do que realmente acontece.

Estes exemplos mostram também a utilidade do que estudámos em todos os capítulos anteriores para o estudo dos sistemas fisiológicos: sistemas análogos, obtenção das equações diferenciais, função de transferência, espaço de estados, curvas de fase, etc., são temas essenciais para o estudo dos sistemas fisiológicos.

5.5 Conclusão.

Neste capítulo usou-se a representação no espaço de estados para estudar a dinâmica de sistemas fisiológicos, fortemente não lineares. O plano de fase (para sistemas de ordem 2) permite definir a estabilidade de cada ponto singular. O comportamento caótico, muito frequente em sistemas fisiológicos que contêm atrasos puros e retroação, está associado a

sucessivas bifurcações, que definem um caminho para o caos, produzidas por variações de parâmetros do sistema. O número de Feigenbaum, considerado uma constante universal, permite encontrar as bifurcações.

Bibliografia

Khoo, Michael C . K., Physiological Control Systems, Analysis, Simulation and Estimation, 2nd Ed., IEEE Press Series in Biomedical Engineering, Wiley 2018, (1st Ed. 2000) . Descarregar a coleção de exemplos Matlab+Simulink de https://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=resource&bcsId=11138&itemId=1119055334&resourceId=43992, 27/07/2020).

Beuter, A., L. Glass, M.C. Mackey and M. S. Titcombe, Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, Springer Verlag New York, 2003.

Hilborn, R. C., Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press, 1994.

Peitigen, H.O., H. Jurgens, and D. Saupe, Chaos and Fractals, the New Frontiers of Science, 2nd Ed. Springer- Verlag New York, 2004.(ver em https://books.google.com/books?id=jVpS_u0Lg4gC&dq=isbn:0387202293 , 27/07/2022)

Outra informação interessante:

https://www.stsci.edu/~lbradley/seminar/index.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory , 27/07/2022

Versão Java do PPLANE: https://www.cs.unm.edu/~joel/dfield/ em 25/07/2022